Mathématiques PT 2024-2025
J. Roger

Semaine de colle 7
Planche 1

Question de Cours.

À l'aide de la formule du binôme, calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n où $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1.

Étudier la courbe γ paramétrée par la fonction vectorielle $M\colon t \mapsto (t - \sin(t)\,, 1 - \cos(2t))$ où $t \in \mathbb{R}$. On s'intéressera en particulier aux éventuels :

— points multiples et équations des tangentes en ces points ;

— points singuliers, leur nature et les équations des (demi–) tangentes en ces points ;

— branches infinies et leurs natures.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ donnée par

$$f(x,y,z,t) = (2x + 9z - 9t, 2y + 3z - 3t, 5z - 3t, 6z - 4t)$$

1. Donner la matrice M de f dans la base canonique de E et prouver que $f^2 - f - 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. En déduire que f est un automorphisme de E et donner une expression de f^{-1} et de M^{-1}.
3. Déterminer $Ker(f - 2Id_E)$ et $Ker(f + Id_E)$.
4. Montrer que $E = Ker(f - 2Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$ et donner la matrice de f dans la base associée.

Semaine de colle 7
Planche 2

Question de Cours.
On note $\mathcal{B} = (1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (X^2,X(X-2),(X-2)^2)$ une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Après un pivot de Gauss simultané, exprimer les coordonnées d'un polynôme $Q = a + bX + cX^2$ dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 1.
Étudier la courbe γ paramétrée par la fonction vectorielle $M\colon t \mapsto (t^5 - t^3\,, t^2)$, où $t \in \mathbb{R}$. On s'intéressera en particulier aux éventuels :

— points multiples et équations des tangentes en ces points ;

— points singuliers, leur nature et les équations des (demi–) tangentes en ces points ;

— branches infinies et leurs natures.

Exercice 2.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x-y, -x+y+z, 3z)$.

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $Ker(f-2Id)$, $Ker(f-3Id)$, et $Ker(f)$.
3. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice D de f est diagonale. Donner D et l'expression de P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
4. Exprimer A en fonction de P et de D. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Semaine de colle 7
Planche 3

Question de Cours.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p une projection de E. Montrer que $tr(p) = rg(p)$.

Exercice 1.
Étudier la courbe γ paramétrée par la fonction vectorielle $M \colon t \mapsto \left(\frac{1}{t^2+1}, \frac{t^3-2}{t^2+1}\right)$ où $t \in \mathbb{R}$. On s'intéressera en particulier aux éventuels :

— points multiples et équations des tangentes en ces points ;

— points singuliers, leur nature et les équations des (demi–) tangentes en ces points ;

— branches infinies et leurs natures.

Indication : Cette courbe ne possède pas de symétrie particulière.

Exercice 2.
Soit $T \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application donnée par $T(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$.

1. Prouver que T est un endomorphisme.
2. Donner la matrice A de T dans la base canonique.
3. Prouver que T est un automorphisme et calculer A^{-1}.
4. En déduire $T^{-1}(P)$ pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.