Colle PT – 8 Jeudi 14/11/2024

A] **Question de cours :**

Justifier la convergence et la valeur des intégrales de référence (Proposition 3, 4, 5 et 6)

Exercices :

1) Existe-t-il des matrices A et B de $M_n(K)$ telles que : $AB - BA = I_n$? Justifier.

2) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ converge et déterminer sa valeur.

3) Etudier la convergence de : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$.

4) Calculer, pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

B] **Question de cours :**

Calculer, en expliquant la méthode utilisée, une primitive de chacune des fonctions :

$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$; $g : x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$; $h : x \longmapsto \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)}$

Exercices :

1) Dans l'espace vectoriel E=$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, soient les fonctions définies par :
$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$ et $f_3(x) = e^{3x}$.

1) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel F de E défini par : $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
2) Soit $\varphi : F \to F$, définie par : $\forall f \in F, \varphi(f) = f'' + f' - 3f$. Démontrer que φ est un endomorphisme de F.
3) Déterminer la matrice M de φ dans la base (f_1, f_2, f_3).
4) φ est-elle bijective de F dans F ? Si oui, déterminer la matrice de φ^{-1} dans la base (f_1, f_2, f_3).

2) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ converge et déterminer sa valeur.

3) Etudier la convergence de : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,dt$.

C] **Question de cours :**

Soit f une fonction de classe C^1 sur [0 ;1]. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\cos(nt)\,dt = 0$

Exercices :

1)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer

$$f^2 = \text{tr}(f)f.$$

À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

2) Etudier la convergence de : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$.

3) Etablir la convergence de l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour AIT KACI Aniss
le mar. 12 nov. 24

Semaine 8

Matrices – Intégration

Question de cours. Calculer, en expliquant la méthode utilisée, une primitive de chacune des fonctions :

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+5}, \quad g\colon x \mapsto \frac{1}{1-x^2}, \quad h\colon x \mapsto \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)}$$

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

On pose $u_1 = e_1$ et, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $u_k = \sum_{i=1}^{k} a^{k-i} e_i$.

On note $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base canonique.

1. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. En déduire que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E.

Exercice 2.

Élements de correction

AIT KACI Aniss

Exercice 1.

On écrit $P = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour trouver P^{-1}, on effectue simultanément sur P et sur I_n les operations suivantes sur les colonnes, en commençant par la fin : $\forall 2 \leqslant k \leqslant n,\ C_k \leftarrow C_k - aC_{k-1}$. Ainsi, P devient I_n et I_n devient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$

D'après le cours (exemple 10 du cours de F. Gaunard), toute matrice inversible est une matrice de passage : cela signifie que la famille des u_k forme une base de E.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour BURGER Alexandre
le mar. 12 nov. 24

Semaine 8

Matrices – Intégration

Question de cours. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice, dans la base canonique, la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau, le rang et l'image de f.
2. Justifier que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$.
3. Construire $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $\varepsilon_2 \in \operatorname{Im} f$.
   Donner alors la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2.

Élements de correction
BURGER Alexandre

Exercice 1.

- Notons $v = (1;-2;0)$: alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} v$, et $\operatorname{rg}(f) = 2$ par le théorème du rang. On voit d'une part que $f(e_2) = v$ donc $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. On voit d'autre part que $f(e_3) = e_3$: puisque v et e_3 ne sont pas colinéaires, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v, e_3)$.

- D'après ci-dessus, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} v$ est clairement inclus dans $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v, e_3)$.

- On prend $\varepsilon_1 = v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, $\varepsilon_2 = e_3$, que l'on complète par un troisième vecteur linéairement indépendant des deux premiers : $\varepsilon_3 = e_2$ par exemple (par mesure de simplicité, car $f(e_2) = v = \varepsilon_1$). Alors $\mathrm{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour PLATEAU Balthazare
le mar. 12 nov. 24

Semaine 8

Matrices – Intégration

Question de cours. Soit $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre 2. Quel peut-être le rang de N ? Montrer que, si $\mathrm{rg}(\mathrm{N}) = 1$, alors N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour $x \in [0\,,1]$, on pose $\mathrm{G}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\int_0^1 \mathrm{G}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 2.

Élements de correction
PLATEAU Balthazare

Exercice 1.

Puisque $G'(x) = f(x)$, on calcule par IPP : $\int_0^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \left[(1-t)G(t)\right]_0^1 + \int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t = -G(0) + \int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors $\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t = G(0) + \int_0^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 2.