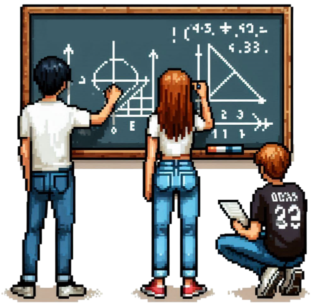


Semaine de colle n°8

Du Mardi 12 Novembre au Vendredi 15 Novembre
Planche n°1

Question de cours

Calculer, en expliquant la méthode utilisée, une primitive de chacune des fonctions :

$$f\,:\;x \longmapsto \frac{1}{x^2+4x+5}, \qquad g\,:\;x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}, \qquad h\,:\;x \longmapsto \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)}.$$

Exercice 1

Soit $\alpha > 0$ fixé.
On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad\qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ et Δ l'endomorphisme de E défini par $\Delta : g \longmapsto g'$.

1. Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
2. Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ? Δ est-il un automorphisme?
3. Calculer A^2 puis A^3. Conjecturer une formule pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on démontrera par récurrence.
4. En déduire les expression de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

Exercice 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$

Éléments de solution

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

1. Pour $n = 0$, l'intégrale I_0 que l'on doit calculer est $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$.
   Soit donc $A > 0$.
   $$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} &= \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$
   Ainsi, I_0 est bien convergente et
   $$I_0 = 1.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto ((\ln(1+x))^n/(1+x)^2$ est continue sur $[0:1]$, donc
   $$\int_0^1 \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$
   est bien définie. Il reste à vérifier la convergence de l'intégrale à l'infini. Comme la fonction $x \mapsto (\ln(1+x))^n/(1+x)^2$ est positive sur $[0;+\infty[$, que
   $$\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$
   et que (par critère de Riemann) l'intégrale
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$$
   converge, le critère d'équivalence pour les fonctions positives permet d'affirmer que
   $$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$
   est également convergente et ainsi I_n est bien définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

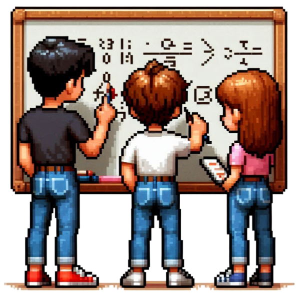
3. On fait bien attention à faire l'intégration par partie sur $[0;A]$ après avoir fixé $A > 0$. Soit donc $A > 0$. Les fonctions $u(x) = (\ln(1+x))^{n+1}$ et $v'(x) = 1/(1+x)^2$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$ rendant licite l'intégration par parties. Ainsi, on a
   $$u'(x) = \frac{(n+1)(\ln(1+x))^n}{1+x}, \qquad v(x) = -\frac{1}{1+x}$$
   et la formule d'IPP donne
   $$\begin{aligned} \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
   Or, par croissance comparée
   $$\lim_{A\to+\infty} \frac{(\ln(1+A))^n}{1+A} = 0$$
   et, comme on a prouvé la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = I_n.$$
   On a donc bien $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

4. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   ✗ <u>initialisation:</u> Pour $n = 0$, on a $I_0 = 1 = 0!$ et la relation est bien vérifiée.

   ✗ <u>hérédité:</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $I_n = n!$. D'après la question précédente, on a alors
   $$I_{n+1} = (n+1)I_n \underset{\text{HR}}{=} (n+1)n! = (n+1)!,$$
   et la relation est bien vérifiée au rang $(n+1)$ ce qui termine la récurrence.

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°8

Du Mardi 12 Novembre au Vendredi 15 Novembre
Planche n°2

Question de cours

Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre 2. Quel peut-être le rang de N ? Montrer que, si $\mathrm{rg}(N) = 1$, alors N est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8}\,\mathrm{d}x$

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant deux changements de variable, calculer la valeur de I.

Exercice 2

Étudier la convergence des intégrales :

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}, \qquad I_2 = \int_3^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2 + 2t + 7}\mathrm{d}t.$$

Exercice 3

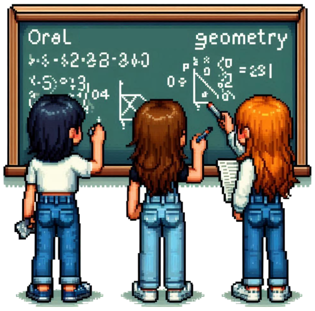
1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\mathrm{d}x$.

2. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\dfrac{x-1}{x} \leq \ln(x) < x - 1$.

3. Soit $A \in]0,1[$.
  a. Démontrer l'égalité :
$$\int_0^A \frac{x\mathrm{d}x}{\ln(x)} = \int_0^{A^2} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)}.$$
  b. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^A \frac{x-1}{\ln(x)}\mathrm{d}x$ et montrer que
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\mathrm{d}x = \ln(2)$$

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°8

Du Mardi 12 Novembre au Vendredi 15 Novembre
Planche n°3

Question de cours

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 1

1. Soit $x>0$. Calculer, à l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t^2+1}$,

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t.$$

2. Justifier, sans calcul, la convergence de

$$I=\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t.$$

3. Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

$$I=\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t$$

Exercice 2

On considère l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que J est convergente et que l'on a $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

2. Montrer que $2J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\mathrm{d}x$, et en déduire la valeur de J.

Exercice 3

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \varphi(AB)=\varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi=\lambda\mathrm{tr}$.

Colle PT – 8 Jeudi 14/11/2024

A] **Question de cours :**

Justifier la convergence et la valeur des intégrales de référence (Proposition 3, 4, 5 et 6)

Exercices :

1) Existe-t-il des matrices A et B de $M_n(K)$ telles que : $AB - BA = I_n$? Justifier.

2) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ converge et déterminer sa valeur.

3) Etudier la convergence de : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$.

4) Calculer, pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

B] **Question de cours :**

Calculer, en expliquant la méthode utilisée, une primitive de chacune des fonctions :

$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$; $g : x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$; $h : x \longmapsto \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)}$

Exercices :

1) Dans l'espace vectoriel E=$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, soient les fonctions définies par :

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$ et $f_3(x) = e^{3x}$.

1) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel F de E défini par : $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
2) Soit $\varphi : F \to F$, définie par : $\forall f \in F, \varphi(f) = f'' + f' - 3f$. Démontrer que φ est un endomorphisme de F.
3) Déterminer la matrice M de φ dans la base (f_1, f_2, f_3).
4) φ est-elle bijective de F dans F ? Si oui, déterminer la matrice de φ^{-1} dans la base (f_1, f_2, f_3).

2) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge et déterminer sa valeur.

3) Etudier la convergence de : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$.

C] **Question de cours :**

Soit f une fonction de classe C^1 sur [0 ;1]. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\cos(nt)\, dt = 0$

Exercices :

1)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer

$$f^2 = \operatorname{tr}(f) f.$$

À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

2) Etudier la convergence de : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$.

3) Etablir la convergence de l'intégrale $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Pour AIT KACI ANISS
le mar. 12 nov. 24

Semaine 8

Matrices – Intégration

Question de cours. Calculer, en expliquant la méthode utilisée, une primitive de chacune des fonctions :

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+5}, \quad g\colon x \mapsto \frac{1}{1-x^2}, \quad h\colon x \mapsto \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)}$$

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
On pose $u_1 = e_1$ et, pour tout $k \in [\![2\,,n]\!]$, $u_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a^{k-i} e_i$.
On note $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base canonique.

1. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. En déduire que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E.

Exercice 2.

Élements de correction

AIT KACI Aniss

Exercice 1.

On écrit $P = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour trouver P^{-1}, on effectue simultanément sur P et sur I_n les operations suivantes sur les colonnes, en commençant par la fin : $\forall 2 \leqslant k \leqslant n,\ C_k \leftarrow C_k - aC_{k-1}$. Ainsi, P devient I_n et I_n devient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$

D'après le cours (exemple 10 du cours de F. Gaunard), toute matrice inversible est une matrice de passage : cela signifie que la famille des u_k forme une base de E.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour BURGER Alexandre
le mar. 12 nov. 24

Semaine 8

Matrices – Intégration

Question de cours. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,1]$.
Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice, dans la base canonique, la matrice A définie par $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau, le rang et l'image de f.
2. Justifier que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$.
3. Construire $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $\varepsilon_2 \in \operatorname{Im} f$.
   Donner alors la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2.

Élements de correction
BURGER Alexandre

Exercice 1.

- Notons $v = (1; -2; 0)$: alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} v$, et $\operatorname{rg}(f) = 2$ par le théorème du rang. On voit d'une part que $f(e_2) = v$ donc $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. On voit d'autre part que $f(e_3) = e_3$: puisque v et e_3 ne sont pas colinéaires, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v, e_3)$.
- D'après ci-dessus, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} v$ est clairement inclus dans $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v, e_3)$.
- On prend $\varepsilon_1 = v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, $\varepsilon_2 = e_3$, que l'on complète par un troisième vecteur linéairement indépendant des deux premiers : $\varepsilon_3 = e_2$ par exemple (par mesure de simplicité, car $f(e_2) = v = \varepsilon_1$). Alors $\mathrm{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour PLATEAU Balthazare
le mar. 12 nov. 24

Semaine 8

Matrices – Intégration

Question de cours. Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre 2. Quel peut-être le rang de N ? Montrer que, si $\mathrm{rg}(N) = 1$, alors N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour $x \in [0,1]$, on pose $G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 2.

Élements de correction
PLATEAU BALTHAZARE

Exercice 1.
Puisque $G'(x) = f(x)$, on calcule par IPP : $\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt = \left[(1-t)G(t)\right]_0^1 + \int_0^1 G(t)\,dt = -G(0) + \int_0^1 G(t)\,dt$.
Alors $\int_0^1 G(t)\,dt = G(0) + \int_0^1 (1-t)f(t)\,dt = 0$.

Exercice 2.