Mathématiques PT 2024-2025
J. Roger

Semaine de colle 9
Planche 1

Question de Cours.

Soient a,b,c trois nombres réels. Calculer, par la règle de Sarrus, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 1.

Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'une décomposition en élément simples.

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+4x+4}\,dx$$

Exercice 2.

Soient $\alpha \in [1;+\infty[$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à l'intégrale impropre

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que cette intégrale est convergente lorsque $\alpha > 1$.
2. On suppose maintenant que $\alpha = 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur β pour que cette intégrale soit convergente.

Semaine de colle 9
Planche 2

Question de Cours.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge mais que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.

Exercice 1.

On considère l'intégrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+3}\, dx$$

1. Justifier que I est convergente.
2. Calculer la valeur de I.

Exercice 2.

On pose
$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\ dx$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une intégrale généralisée et montrer qu'elle est convergente.
2. À l'aide de l'identité $\sin x = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$, montrer que I satisfait l'égalité
$$I = \frac{\pi \ln(2)}{2} + 2I$$
et en déduire la valeur de I.

Semaine de colle 9
Planche 3

Question de Cours.
Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx$$

Exercice 1.
Déterminer chacun des déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 2.
Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} \, dt$$

Colle PT – 9 Jeudi 21/11/2024

A] **Question de cours :**

Soient a,b,c trois réels . Calculer, par la règle de Sarrus : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

Exercices :

1) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ converge et déterminer sa valeur.

2)

On considère les matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $B = TA$ et calculer le déterminant de B.
2. Déduire de la question précédente le déterminant de A.
3. Déduire de la question précédente le déterminant de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & 6 & 40 \end{pmatrix}.$$

3) Etudier la convergence de : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$.

B] **Question de cours :**

Justifier la convergence et la valeur des intégrales de référence (Proposition 3, 4, 5 et 6)

Exercices :

1) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge et déterminer sa valeur.

2)

Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

3) Etudier la convergence de : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$.

C] **Question de cours :**

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge mais que $t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.

Exercices :

1) Etudier la convergence de : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$.

2)

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

3) Etablir la convergence de l'intégrale $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour DJOMATCHOUA Fidèle
le mar. 19 nov. 24

Semaine 9

Intégrales généralisées – Déterminant

Question de cours. Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$.

Exercice 1. Soit $g \colon t \in [1\,,+\infty[\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2t-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$.

1. Démontrer que g est intégrable sur $[1\,,+\infty[$.
2. Pour un réel $\mathrm{A} > 1$, on note $\mathrm{I}_\mathrm{A} = \int_1^\mathrm{A} g(t)\,\mathrm{d}t$.

   Démontrer que $\mathrm{I}_\mathrm{A} = \int_{1/2}^{1} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t}} - \int_{\mathrm{A}-1/2}^{\mathrm{A}} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t}}$.
3. En déduire la valeur de $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2.

Élements de correction

DJOMATCHOUA FIDÈLE

Exercice 1.

- Par DL, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-1}}\left(\frac{1}{4t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{2}t^{3/2}}$, ce qui assure l'intégrabilité sur $[1\,,+\infty[$.
- On fait le CDV $2u = 2t-1$ dans la première intégrale et on applique la relation de Chasles pour obtenir le résultat.
- Ainsi $\mathrm{I}_\mathrm{A} = \left[\sqrt{2t}\right]_{1/2}^{1} - \left[\sqrt{2t}\right]_{\mathrm{A}-1/2}^{\mathrm{A}}$ et le même DL que ci-dessus permet de passer à la limite et d'obtenir $\int\limits_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}-1$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour SADADOU Erwan
le mar. 19 nov. 24

Semaine 9

Intégrales généralisées – Déterminant

Question de cours. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0\,,+\infty[$.

Exercice 1. Pour tout réel $a > 0$, on pose $\mathrm{I}_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la convergence de I_a, pour tout $a > 0$.
2. Calculer I_1, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
3. En déduire une expression de I_a, pour tout $a > 0$.

Exercice 2.

Élements de correction
SADADOU Erwan

Exercice 1.
On note $g(t) = \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ pour un $a > 0$ fixé.

- En 0, $g(t) \sim \frac{\ln t}{a^2}$ et $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $[0,1]$ (sa primitive $t \mapsto t\ln t - t$ admet une limite finie en 0) donc g est également intégrable.

  En $+\infty$, $g(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, g est aussi intégrable en $+\infty$. Ainsi, l'intégrale généralisée définissant f est bien convergente.
- Avec le CdV du texte, $\mathrm{I}_1 = -\mathrm{I}_1$ donc $\mathrm{I}_1 = 0$.
- Pour $a > 0$, on fait le CdV $u = \frac{t}{a}$: $\mathrm{I}_a = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u + \ln a}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\left(\mathrm{I}_1 + \ln a \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\ln a}{a}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour LAOUFI Rayan
le mar. 19 nov. 24

Semaine 9

Intégrales généralisées – Déterminant

Question de cours. Donner la condition nécessaire et suffisante de convergence de chacune des intégrales impropres de référence suivantes et, le cas échéant, calculer leurs valeurs :

$$\mathrm{A}_\alpha = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{B}_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}, \quad \mathrm{C}_\alpha = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}, \quad \mathrm{D} = \int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(x) = \int_0^x t^{2n+1}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer, pour tout réel x, $\varphi_0(x)$. En déduire la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Établir une relation de récurrence entre $\varphi_n(x)$ et $\varphi_{n+1}(x)$.
3. En déduire la nature de $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, et donner sa valeur.

Exercice 2.

Élements de correction

LAOUFI RAYAN

Exercice 1.

- Soit $x \in \mathbb{R}$: $\varphi_0(x) = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-x^2})$. Puisque $\varphi_0(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.
- $\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x t^{2n+2} \times t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et, avec $u = t^{2n+2}$ et $v' = t\mathrm{e}^{-t^2}$, l'IPP donne $\varphi_{n+1}(x) = \left[-\frac{1}{2}t^{2n+2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x t^{2n+1}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = (n+1)\varphi_n(x) - \frac{1}{2}x^{2n+2}\mathrm{e}^{-x^2}$.
- Par récurrence immédiate, en faisant tendre x vers $+\infty$, on montre que I_n converge et que $\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n$, ou encore que $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_{n-1}$. On en déduit donc que $\mathrm{I}_n = \frac{n!}{2}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour BOULIF Lamia
le lun. 18 nov. 24

Semaine 9

Intégrales généralisées – Déterminant

Question de cours. Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$.

Exercice 1. Soit $g : t \in [1, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2t-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$.

1. Démontrer que g est intégrable sur $[1, +\infty[$.
2. Pour un réel $\mathrm{A} > 1$, on note $\mathrm{I}_\mathrm{A} = \int_1^\mathrm{A} g(t) \, \mathrm{d}t$.

   Démontrer que $\mathrm{I}_\mathrm{A} = \int_{1/2}^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t}} - \int_{\mathrm{A}-1/2}^\mathrm{A} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t}}$.
3. En déduire la valeur de $\int_1^{+\infty} g(t) \, \mathrm{d}t$.

Exercice 2.

Élements de correction

BOULIF Lamia

Exercice 1.

- Par DL, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-1}}\left(\frac{1}{4t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{2}t^{3/2}}$, ce qui assure l'intégrabilité sur $[1\,,+\infty[$.
- On fait le CDV $2u = 2t-1$ dans la première intégrale et on applique la relation de Chasles pour obtenir le résultat.
- Ainsi $\mathrm{I}_{\mathrm{A}} = \left[\sqrt{2t}\right]_{1/2}^{1} - \left[\sqrt{2t}\right]_{\mathrm{A}-1/2}^{\mathrm{A}}$ et le même DL que ci-dessus permet de passer à la limite et d'obtenir $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}-1$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour HAMITOUCHE Léna
le lun. 18 nov. 24

Semaine 9

Intégrales généralisées – Déterminant

Question de cours. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0\,,+\infty[$.

Exercice 1. Pour tout réel $a > 0$, on pose $\mathrm{I}_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la convergence de I_a, pour tout $a > 0$.

2. Calculer I_1, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

3. En déduire une expression de I_a, pour tout $a > 0$.

Exercice 2.

Élements de correction
HAMITOUCHE LÉNA

Exercice 1.

On note $g(t) = \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ pour un $a > 0$ fixé.

- En 0, $g(t) \sim \frac{\ln t}{a^2}$ et $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $[0,1]$ (sa primitive $t \mapsto t\ln t - t$ admet une limite finie en 0) donc g est également intégrable.

  En $+\infty$, $g(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, g est aussi intégrable en $+\infty$. Ainsi, l'intégrale généralisée définissant f est bien convergente.
- Avec le CdV du texte, $\mathrm{I}_1 = -\mathrm{I}_1$ donc $\mathrm{I}_1 = 0$.
- Pour $a > 0$, on fait le CdV $u = \frac{t}{a}$: $\mathrm{I}_a = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u + \ln a}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\left(\mathrm{I}_1 + \ln a \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\ln a}{a}$.

Exercice 2.