Math PT. 2024 - 2025

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

17

Semaine de colles n°17: du 27/01 au 31/01

Programme

✗ **Chapitre 12**. Lundi et Mardi : jusqu'à la notion de **Covariance** et ses propriétés. Intégralité à partir de Jeudi.

Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard. Il est donc nécessaire de les avoir toutes préparées au préalable sous peine de passer un très mauvais moment.

1. Reproduire le tableau de synthèse des lois usuelles (page 14).

2. Soient $p \in]0,1[$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$.
a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$.
b. Obtenir de deux façons la valeur de $E(X)$.
c. On pose $Y = 1/X$. Calculer, à l'aide du meilleur théorème du cours, $E(Y)$.

3. Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) indiscernables au toucher et toutes de couleurs différentes. La moitié d'entre elles sont marquées du chiffre 0 et les autres sont numérotées de 1 à n. On extrait simultanément une *poignée* de n boules de cette urne. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule i est dans la poignée et 0 sinon.
a. Quelle est la loi de X_i? Préciser $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
b. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$.
Calculer, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
c. Soit Z est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules portant le chiffre 0.
Calculer $E(Z)$. Comment calculer $V(Z)$?

4. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère la matrice aléatoire M définie comme suit.
Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) & 1 \\ 1 & X(\omega)+Y(\omega) & 0 \\ 0 & Y(\omega) & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité que M soit inversible.

5. $(*)$ Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires admettant chacune une variance. Montrer que

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

6. (A partir de jeudi, ou pour les 5/2) Calculer la série génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.