Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

18

Semaine de colles n°18: du 03/02 au 07/02

Programme

- ✗ **Chapitre 12**. Intégralité. On insistera surtout sur la fin du Chapitre : fonctions génératrices, Inégalités de, Markov et Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.

- ✗ **Chapitre 13**. Produit scalaire. Norme. Familles orthonormales. Procédé de Gram-Schmidt.

Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard. Il est donc nécessaire de les avoir toutes préparées au préalable sous peine de passer un très mauvais moment.

1. Reproduire le tableau de synthèse des lois usuelles (page 14) en y ajoutant une colonne pour l'expression des fonctions génératrices.

2. Énoncés précis des inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
Application. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$ et $\alpha \in]0,1[$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Montrer que :

$$P\left(p \notin \left[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{1}{4\alpha n}}, \, \overline{X}_n + \sqrt{\frac{1}{4\alpha n}}\right]\right) \leq \alpha.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0\leq j\leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X-a)^j$.

4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base (u_1, u_2, u_3) où

$$u_1 = (1,0,1), \quad u_2 = (1,1,1), \quad u_3 = (-1,-1,0).$$