



# 19

## Semaine de colles n°19: du 10/02 au 14/02

### Programme

- ✗ **Chapitre 13.** Intégralité.
- ✗ **Chapitre 14.** Notions de topologie. Continuité. Dérivées partielles d'ordre 1.
- ✗ Préparation du concours blanc. On pourra poser ce qui nous fait plaisir.

### Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard. Il est donc nécessaire de les avoir toutes préparées au préalable sous peine de passer un très mauvais moment.

1. Soient  $E$  un espace euclidien et  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $u$ . Donner l'expression, en détaillant toutes les étapes, pour tout  $x \in E$  de la distance de  $x$  à  $H$  (en fonction de  $x$  et de  $u$ ).

2. Dans  $\mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique, on considère  $F$  le sous-espace vectoriel défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$

Déterminer le projeté orthogonal de  $u = (1, 8, 1, 1)$  sur  $F$ .

3. Représenter puis déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

i.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - 1| < 1\}$

ii.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$

iii.  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 1\}$

iv.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

4. Représenter, pour tout  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , la ligne de niveau  $k$  de la fonction  $f : (x, y) \mapsto x + y - 1$ .

5. Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en  $(0, 0)$  ?

i.  $f(x, y) = (x+y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$

ii.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

iii.  $f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}$