Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

5 Semaine de colles n°5 : du 07/10 au 11/10

Programme

- ✗ **Informatique**. Notions de dictionnaire (lecture et écriture).
- ✗ **Chapitre 2**. Intégralité.
- ✗ Reprise du **Devoir Surveillé n°2**

Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard. Il est donc nécessaire de les avoir toutes préparées au préalable sous peine de passer un très mauvais moment.

1. **Informatique.** Écrire une fonction `occurences(T)` qui prend en argument une chaîne de caractères `T` et renvoie un dictionnaire associant à chaque caractère présent dans `T` le nombre d'occurrences de celui-ci.

2. Énoncé du théorème du rang. Cas particulier des endomorphismes en dimension finie. On attend une explication de chaque équivalence du **Théorème 8**.

3. Déterminer, pour tout entier $n \geq 2$, si les familles ci-dessous sont libres ou liées dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:
$$\mathcal{F}_n = (f_1, f_2, ..., f_n),\ \text{où}\ f_k : x \mapsto \sin(x+k), \qquad G_n = (g_1, g_2, ..., g_n),\ \text{où}\ g_k : x \mapsto \cos(kx).$$

4. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$f \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).$$
Que dire du rang r d'un tel endomorphisme dans le cas où E est de dimension finie n ?

5. Soient E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p (resp. q) le projecteur sur F_1 (resp. F_2) parallèlement à F_2 (resp. F_1).
Montrer que $p + q = \mathrm{id}_E$ et que $pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}$.