**Math PT.** 2024 - 2025

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

# 7 Semaine de colles n°7 : du 04/11 au 08/11

## Programme

- ✗ **Chapitre 3**. Intégralité.
- ✗ **Chapitre 4**. Intégralité.

## Questions de cours

*Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard. Il est donc nécessaire de les avoir toutes préparées au préalable sous peine de passer un très mauvais moment.*

1. Montrer que la courbe $\Gamma$ paramétrée par $M(t) = (\exp(\sin(2t)), \exp(\cos(t))$ admet un unique point double. Donner une équation de chacune des tangentes en ce point.

2. Étudier puis tracer la courbe paramétrée $\gamma$ par la fonction vectorielle $M : t \mapsto \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$.
   *On précisera la nature d'éventuels points singuliers et/ou de branches infinies.*

3. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ où $D_t$ est définie par l'équation : $t^3(x-1) + 3tx - 2y = 0$.

4. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (X^2, X(X-2), (X-2)^2)$ une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Après un pivot de Gauss simultané, exprimer les coordonnées d'un polynôme $Q = a + bX + cX^2$ dans $\mathcal{B}'$.

5. À l'aide de la formule du binôme, calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $A^n$, où $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $p$ une projection de $E$. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.