



# 8

## Semaine de colles n°8 : du 12/11 au 15/11

### Programme

✗ **Chapitre 4.** Intégralité.

✗ **Chapitre 5.** Intégration sur un segment. Concernant l'intégrale généralisée, les colles de mardi se limitent au cours jusqu'au paragraphe **2.3** inclus. Intégralité du chapitre pour les colles de Jeudi.

### Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard. Il est donc nécessaire de les avoir toutes préparées au préalable sous peine de passer un très mauvais moment.

1. Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $p$  une projection de  $E$ . Montrer que  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ .
2. Soit  $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  une matrice nilpotente d'ordre 2. Quel peut-être le rang de  $N$ ? Montrer que, si  $\text{rg}(N) = 1$ , alors  $N$  est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer, en expliquant la méthode utilisée, une primitive de chacune des fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, \quad g : x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}, \quad h : x \mapsto \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x - 1)(x + 3)}.$$

4. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \cos(nt) dt = 0$ .
5. Justification de la convergence et calcul des intégrales impropres convergentes de référence : **Proposition 3, Proposition 4, Proposition 5** et **Proposition 6**.