Concours Blanc n°1

Solution

Toutes les réponses doivent êtres ***justifiées****. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

(1) L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x pour lequel le dénominateur $e^{2x}-1$ est non nul. On résout donc l'équation

$$e^{2x}-1=0 \iff e^{2x}=1 \iff 2x=0 \iff x=0,$$

ainsi f est définie sur $\mathbb{R}^\star$. De plus, le numérateur et le dénominateur de f sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^\star$ et f y est ainsi dérivable.

(2) Par les règles de dérivation d'un quotient, bien connues depuis l'enfance, on trouve

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}-1)-(e^{2x}+1)2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2},$$

qui est une quantité strictement négative pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$. En particulier, f est donc strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

(3) On fait apparaître au numérateur le dénominateur:

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-1} + \frac{2}{e^{2x}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1}.$$

Or, $2/(e^{2x}-1) \longrightarrow 0$ lorsque $x \to +\infty$ et il suit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

En particulier, la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(4) Lorsque $x \to 0$, avec $x>0$, $e^{2x}-1>0$ et $e^{2x}-1 \longrightarrow 0^+$. Ainsi,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{t\to0^+} \frac{2}{t} = +\infty,$$

et la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale en 0^+.

(5) À partir des résultats précédents, on peut dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$
f	$\Vert$	$+\infty \searrow 1$

En particulier, 1 est le minimum de f sur $]0;+\infty[$ et la fonction y est donc strictement positive.

(6) Soit $x \neq 0$. Le calcul donne

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}+\frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1} \\ &= \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}+\frac{e^{-2x}\left(1+e^{2x}\right)}{e^{-2x}\left(1-e^{2x}\right)} \\ &= \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}-\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. La fonction f est donc impaire. Sa courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(7) On a déjà trouvé deux asymptotes $y=1$ en $+\infty$ et $x=0$ en 0^+. Les propriétés de symétrie centrale impliquent alors que $y=-1$ est asymptote en $-\infty$ et $x=0$ en 0^-.

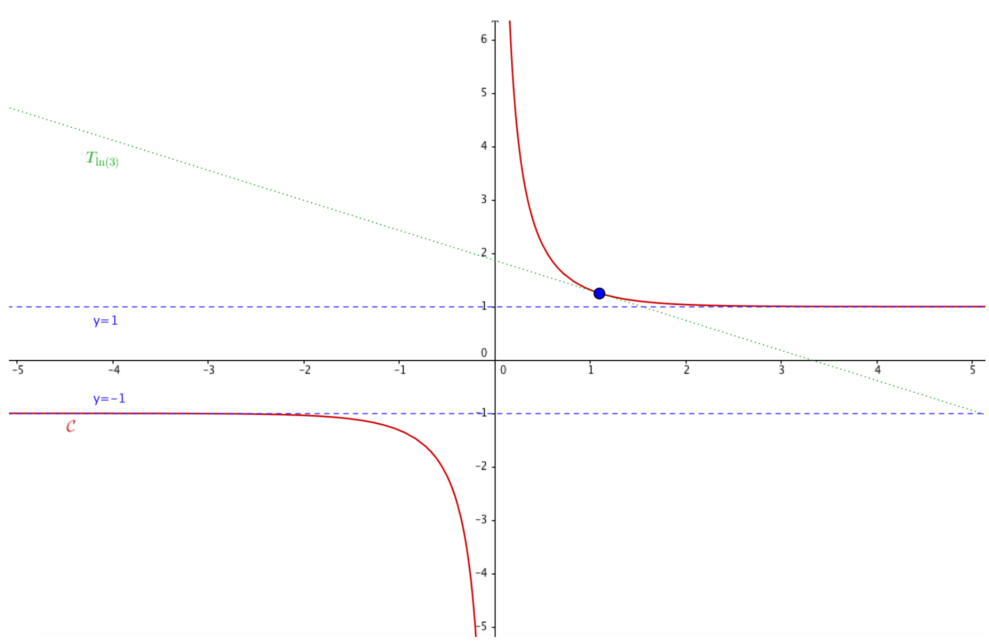
(8) On calcule directement

$$f(\ln(3)) = \frac{e^{2\ln(3)}+1}{e^{2\ln(3)}-1} = \frac{e^{\ln(9)}+1}{e^{\ln(9)}-1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

et

$$f'(\ln(3)) = \frac{-4e^{2\ln(3)}}{(e^{2\ln(3)}-1)^2} = \frac{-36}{64} = \frac{-9}{16}.$$

(9) Le tableau de valeurs permet, ainsi que les propriétés de symétrie, de tracer $\mathcal{C}$, les asymptotes mais aussi la tangente au point d'abscisses $\ln(3)$.



(10) On considère maintenant la fonction g définie par $g(x) = \ln(e^{2x} - 1) - x$. Cette fonction est définie sur l'ensemble des réels x pour lesquels l'argument du logarithme est strictement positif:

$$e^{2x} - 1 > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff x > 0.$$

Ainsi, g est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Elle y est aussi dérivable comme composée de fonction dérivables sur cet intervalle. De plus,

$$g'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} - 1 = \frac{2e^{2x} - e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = f(x).$$

(11) Si $x \longrightarrow 0^+$, $e^{2x} - 1 \longrightarrow 0^+$, et donc $g(x) \longrightarrow -\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeur supérieure.

(12) On factorise par e^{2x}:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(e^{2x}\left(1 - e^{-2x}\right)\right) - x = \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-2x}) - x \\ &= x + \ln(1 - e^{-2x}). \end{aligned}$$

Or, $e^{-2x} \longrightarrow 0$, lorsque $x \to +\infty$ et donc $g(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

(13) La dérivée de g étant égale à f dont on connait le signe sur $]0; +\infty[$, il est facile de dresser le tableau de variations de g:

x	0		$+\infty$
$g'(x) = f(x)$	$\|\|$	$+$	
g	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g étant strictement croissante sur son ensemble de définition, elle définit une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (d'après les limites calculées précédemment). Il suit que 0 possède une unique antécédent par g et donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α.

(14) On constate que

$$g(\ln(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad g(\ln(2)) = \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) > 0.$$

Par croissance de g, il suit nécessairement que

$$\ln(\sqrt{2}) \leq \alpha \leq \ln(2).$$

Exercice 2. (D'après Ecricome 2011)

Partie 1. Un jeu en ligne.

(1) Les positionnements sont déterminés par l'ensemble (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9: il y en a donc $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

(2) H est formé de 3 positionnements: ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables (on le suppose) donc $\mathrm{P}(H) = 3/84$. De même, V est formé de 3 positionnements : colonne A, B ou C donc $\mathrm{P}(V) = 3/84$. Enfin, D comporte les deux diagonales descendants et ascendantes. Donc $\mathrm{P}(D) = 2/84$.

(3) (H, V, D, N) étant un système complet d'événements, on a $P(H)+P(V)+P(D)+P(N) = 1$ ou encore

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N) &= 1 - \mathrm{P}(V) - \mathrm{P}(H) - \mathrm{P}(D) \\ &= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} \\ &= \frac{19}{21}. \end{aligned}$$

(4) (a) D'après la question précédente, le joueur perd avec probabilité 19/21, c'est à dire que la société gagne donc les deux euros misés initialement par le joueur. Dans le cas contraire (si le joueur gagne - avec probabilité 2/21) elle perd 18 euros. Le gain moyen M par relance est donc la moyenne des gains de la société pondérée par leur probabilité d'apparition. On a bien

$$M = 2 \times \frac{19}{21} - 18 \times \frac{2}{21} = \frac{2}{21}.$$

(b) Le gain total journalier de la société est égal au total des gains moyens, par relance, pour chacune des 10000 relances, supposées indépendantes. Ainsi, le gain journalier moyen est égal à

$$10000 \times \frac{2}{21},$$

ce qui est proche de 1000 euros.

Partie 2. Cas de joueurs invétérés.

(1) On suppose donc que le joueur joue n parties, supposées indépendantes, avec un maximum de 100 parties. La probabilité de gagner au moins une partie s'obtient en calculant celle de l'évènement contraire, à savoir de n'en gagner aucune. Á chaque partie, la probabilité de perdre, d'après par Partie 1., est égale à 19/21. Les parties étants indépendantes, la probabilité de perdre consécutivement les n parties est égale à $(19/21)^n$. La probabilité d'en gagner au moins une est donc égale à

$$1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n.$$

On cherche pour quelle valeur minimale de n cette probabilité est supérieure à 0.5, on résout donc l'équation

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq \frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{-\|n(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \simeq 7. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de 7 parties, le joueur a au moins 50% de chances de gagner au moins une fois.

(2) Notons G_j l'évènement "On joue j parties: on perd les $j-1$ premières et on gagne la $j-$ième". La probabilité cherchée dans cette question est celle de l'évènement

$$\bigcup_{j=1}^{k} G_j,$$

où la réunion est disjointe. De plus, chaque G_j a pour probabilité (les parties étant indépendantes)

$$P(G_j) = \left(\frac{19}{21}\right)^{j-1} \times \frac{2}{21}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} p_k &= \sum_{j=1}^{k} P(G_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{19}{21}\right)^{j-1} \times \frac{2}{21}\right) \\ &= \frac{2}{21} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{19}{21}\right)^{j} \\ &= \frac{2}{21} \left(\frac{1-\left(\frac{19}{21}\right)^k}{1-\frac{19}{21}}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

Partie 3. Contrôle de la qualité du jeu.

(1) Sachant Δ, les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes. Il y a donc $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.

H est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante. Il suit que

$$\mathrm{P}_\Delta(H) = \mathrm{P}_\Delta(V) = \mathrm{P}_\Delta(D) = \frac{1}{28}.$$

(2) Il découle de la question précédente que$\mathrm{P}_\Delta(N) = 1 - 3/28 = 25/28$. Sachant $\overline{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la Partie 1. et les probabilités sont donc celle de la Partie 1., c'est à dire $\mathrm{P}_{\overline{\Delta}}(N) = 19/21$. Comme $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ est un système complet d'événements, la *formule des probabilités totales* donne

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N) &= \mathrm{P}_{\overline{\Delta}}(N)\,\mathrm{P}(\Delta) + \mathrm{P}_\Delta(N)\,\mathrm{P}(\Delta) \\ &= \frac{25}{28}x + \frac{19}{21}(1-x) \\ &= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(3) On cherche donc $\mathrm{P}_{\bar{N}}(\Delta)$ par la *formule de Bayes*.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{\mathrm{P}\left(\Delta \cap \bar{N}\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{N}\right)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(\Delta)\,\mathrm{P}_{\Delta}\left(\bar{N}\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{N}\right)} \\ &= \frac{x \times \frac{3}{28}}{1-\left(-\frac{x}{84}+\frac{19}{21}\right)} \\ &= \frac{x \times \frac{3}{28}}{\frac{2}{21}+\frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8}.\end{aligned}$$

(4) Pour exactement les mêmes raisons qu'à la Partie 1., le gain moyen à chaque relance est égal à la somme perçue par la société coefficientée par la probabilité d'apparition de l'évènement correspondant. Ici, ce gain moyen est donc égal à

$$2 \times \left(-\frac{x}{84}+\frac{19}{21}\right) - 18 \times \left(\frac{2}{21}+\frac{x}{84}\right) = \frac{2-5x}{21}.$$

Ce gain est positif si et seulement si $x \leq \frac{2}{5}$. La valeur maximale à ne pas dépasser pour x est alors $2/5$ si l'on veut que le gain moyen à chaque relance reste positif.

Exercice 3. (D'après Inseec 2002)

(1) (a) Sauf pour la première partie où il ne mise que sur un numéro, quand il a gagné la partie précédente, il mise sur 3 numéros parmi 12 équiprobables. Quand il a perdu, par contre, il ne mise que sur 2 numéros. On en déduit les probabilités (conditionnelles) suivantes:

$$P(A_1) = 1/12, \qquad P_{A_n}(A_{n+1}) = 3/12 = 1/4 \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 2/12 = 1/6.$$

Comme $\left(A_n, \overline{A}_n\right)$ est un système complet d'événements alors

$$\begin{aligned}P(A_{n+1}) &= P_{A_n}(A_{n+1})\,P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\,P\left(\overline{A}_n\right) \\ &= \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{6}P\left(\overline{A}_n\right) \\ &= \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{6}(1-P(A_n)) \\ &= \frac{1}{12}P(A_n) + \frac{1}{6},\end{aligned}$$

et on a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$

(b) Cette suite est arithmético-géométrique. On détermine donc un réel ℓ tel que

$$\ell = \frac{1}{12}\ell + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \ell = \frac{2}{11}.$$

Puis, on définit alors la suite (u_n) par $u_n = p_n - \ell$ et on a pour tout entier $n \geq 1$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \ell = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{12}\ell + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}(p_n - \ell) = \frac{1}{12}u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1/12$ donc pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times u_1 = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times \left(p_1 - \frac{2}{11}\right) = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{11}\right) \\ p_n &= u_n + \ell = \frac{2}{11} - \frac{13}{131}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \longrightarrow \frac{2}{11} \text{ quand } n \to +\infty \text{ car } \left|\frac{1}{12}\right| < 1. \end{aligned}$$

(2) Soit $k \in [\![1; n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie ».

(a) On peut exprimer B_n comme suit

$$B_n = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \overline{A}_{n-1} \cap A_n$$

et par la *formule des probabilités composées*

$$P(B_n) = P(\overline{A}_1) \times P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) \times \cdots \times P_{\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k}(A_n).$$

Le conditionnement précise qu'à partir du second jeux, le joueur ne mise que sur 2 jetons donc la probabilité de perdre est de $10/12 = 5/6$ et $P(\overline{A}_1) = 11/12$ donc

$$P(B_n) = \frac{11}{12} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.$$

(b) De manière analogue

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n} \overline{A}_k\right) \\ P(B_1) &= P(A_1) \times P_{A_1}(\overline{A}_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n-1} \overline{A}_k\right)}(\overline{A}_n) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} \times \frac{10}{12} \times \ldots \frac{10}{12} \\ &= \frac{1}{48}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

et, pour $k \in [\![2; n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} B_k &= \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \cdots \cap \overline{A}_n \\ P(B_k) &= \frac{11}{12} \times \left(\frac{10}{12}\right)^{k-2} \times \frac{9}{12} \times \frac{2}{12} \times \left(\frac{10}{12}\right)^{n-k-1} \\ &= \frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}. \end{aligned}$$

(c) En notant B le fait de gagner exactement une fois, on a clairement

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

où la réunion est **disjointe**. Il suit donc que

$$\begin{aligned} q_n &= P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\ &= \frac{1}{48}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{48} + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{11}{96}\times\frac{5}{6}\right) + \frac{11}{72}\right) \\ &= \frac{55n-110}{576}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Exercice 4. (D'après Ecricome 1999)

Préliminaires

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$

La suite (x_n) est récurrente linéaire du second orde à coefficients constants. Son équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$ et pour solutions $r_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$.

Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \lambda (r_1)^n + \mu (r_2)^n$.

Et ces deux racines appartenant à $]-1, 1[$ on a alors $(r_1)^n \to 0$ et $(r_2)^n \to 0$. On peut donc conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

Soient alors a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.
On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

Question 1

(a) Pour $n = 0$ on a u_0 et u_1 définis avec plus précisément $u_0 = a \geq 1$ et $u_1 = b \geq 1$. L'initialisation est bien vérifiée.

Soit donc n tel que $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$. En particulier, $u_{n+1} \geq 1$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ sont bien définis comme somme de racines de nombres positifs. De plus, $u_{n+2} \geq 2 \geq 1$ et la récurrence est ainsi facilement démontrée.

(b) Si (u_n) a une limite finie ℓ alors, d'après la question précédente, on sait déjà que $\ell \geq 1$. De plus,en passant à la limite dans la relation de récurrence définissant u_{n+2}, on a $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$, ce qui entraîne $\ell^2 = 4\ell$ d'où $\ell = 4$ ou $\ell = 0$ et comme $\ell \geq 1$, la seule limite possible, **si** (u_n) converge, est bien $\ell = 4$.

(c) On a déjà écrit ce type de programme. On en propose ici une version

```
a=input("Entrer valeur du réel a >= 1: ");
b=input("Entrer valeur du réel b >=1: ");
n=input("Entrer rang de la suite à calculer: ");
u=a;
v=b; // on initialise les deux premiers termes
for i=2:n
    w=sqrt(v)+sqrt(u);
    u=v;
    v=w;
end
disp(v)
```

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1.$$

(a) On a $u_n = (2v_n + 1)^2$. Il suit que si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

(b) On simplifie l'égalité par équivalence : $(2 + v_n \neq 0\ )$

$$\begin{aligned}
v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} &\iff 2(2 + v_{n+2})v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\
&\iff 2\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \\
&\iff 2\left(\frac{1}{4}u_{n+2} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 2 \\
&\iff u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}
\end{aligned}$$

cette égalité étant vraie, la première également. De plus, comme $u_{n+2} \geq 1$ alors

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \geq -\frac{1}{2}$$

et $2\left(2 + v_{n+2}\right) \geq 3$. Ainsi, $v_{n+2} \leq \frac{1}{3}\left(v_{n+1} + v_n\right)$. D'autre part, grâce à l'inégalité triangulaire, $|v_{n+1} + v_n| \leq |v_{n+1}| + |v_n|$. Au final, on a bien

$$|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right).$$

(c) On note (x_n) la suite définie par: $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$

On procède par récurrence sur n et $n+1$.

Pour $n = 0$ on a $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$ alors

$$\begin{aligned}
|v_{n+2}| &\leq \frac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right) \\
&\leq \frac{1}{3}\left(x_n + x_{n+1}\right) = x_{n+2}
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout entier naturel n, $0 \leq |v_n| \leq x_n$. En utilisant le fait que $x_n \to 0$, obtenu à la première question, le théorème des gendarmes implique que $v_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exerice 5.

Cet exercice est déjà apparu dans le **Devoir Surveillé n°2**. On y renvoie pour la correction.