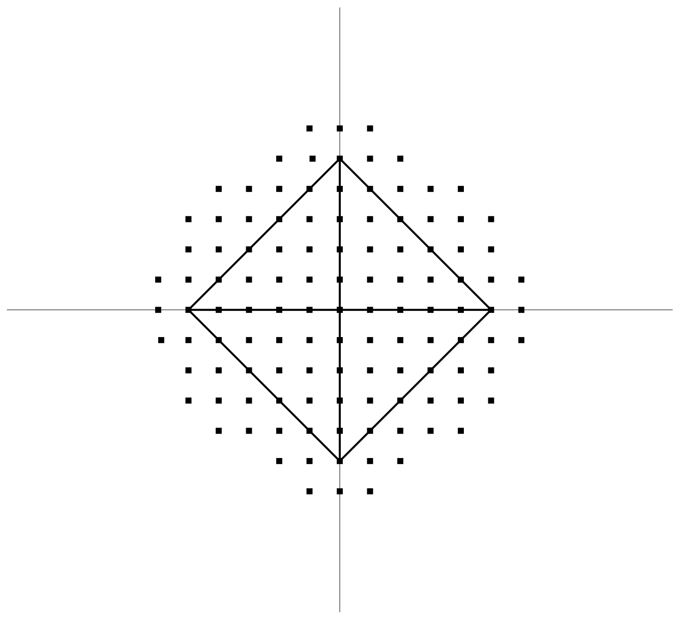
LS1 Simulation d'avalanches - niveau $3^{eme}, 2^{nde}, 1^{ere}$

Présentation

Le but de ce sujet est de trouver un modèle discret qui permet de simuler la propagation d'une avalanche déclenchée dans le flanc d'une montagne. Pour cela on propose le modèle suivant.

Dans le plan on associe a chaque point (x, y) a coordonnées entières un nombre entier entre 0 et 10 qui caractérise la hauteur de la couche de neige dans le carre de cote une unité autour de (x, y). La hauteur critique de neige est de 4, c.a.d. au dessous de cette valeur, une avalanche ne peut pas être déclenchée quelle que soit la pente du flanc. A partir d'une hauteur de neige de 4, un point en pente cède toute sa neige a ses points voisins, la répartition dépendra de la position du point sur le flanc de la montagne.

Notre montagne est modélisée par une pyramide a base carrée dont le sommet est au dessus du point $(0,0)$ et les autres sommets ont les coordonnées $(n,0),(0,n),(-n,0),(0,-n)$. Tous les points a l'intérieur du carre ainsi défini sont considérés comme points sur les flancs de la montagne, les 4 arêtes sont supportées par les axes, comme indique dans la figure suivante en vue d'oiseau.



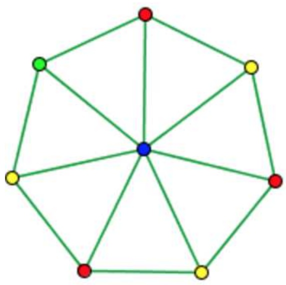
Pour commencer on étudiera le cas ou tous les points sur la montagne ont une hauteur de neige égale à 3. Puis on déclenche l'avalanche en augmentant la hauteur de neige de 1 en un point donne. Au temps $t = 0$ ce point cède toute sa neige a ses voisins. Au temps $t = 1$ on réitère le processus : tous les points ou la hauteur de neige excède 3 versent leur neige, et ainsi de suite. À vous maintenant de trouver comment repartir la neige cédée (en fonction de la position du point) pour simuler de manière optimale une avalanche. Pour chaque répartition, essayez de trouver ou l'avalanche va s'arrêter, et combien de temps (=itérations) cela mettra. Il sera très utile de programmer le processus pour obtenir une visualisation de l'avalanche.

LS2 — Récurrences - niveau 1^{ere}, T^{le}

PRÉSENTATION

Tous les sommets d'un polygone régulier à 10 côtes doivent être coloriés. On dispose de 3 couleurs, et il faut choisir une couleur pour chaque sommet de telle manière que deux sommets voisins soient toujours de couleur différente. Combien y-a-t-il de possibilités de le faire ?

Étudiez d'abord le cas du triangle équilatéral, puis du carre, puis du pentagone... Essayez trouver une relation qui permette de déduire la réponse pour les polygones a n sommets connaissant celle pour les polygones à moins de n sommets. On appelle une telle relation une *récurrence*. Pour le problème donné, on pourra ainsi avancer pas par pas pour arriver à 10. Mais peut-on également déduire une formule qui permette de trouver directement la réponse en fonction du nombre de sommets ? Et comment faire pour davantage de couleurs ?



LS3 — Un jeu de cartes malicieux - niveau 1^{ere}, T^{le}

PRÉSENTATION

Ce jeu se joue avec 100 cartes numérotées de 1 à 100. Au début du jeu les cartes sont posées ouvertement sur la table afin que tous les nombres soient visibles. Deux joueurs prennent, chacun a son tour, une carte à la fois suivant la règle suivante : le numéro de la carte qu'on prend doit être un diviseur ou un multiple du numéro de la carte prise par l'adversaire juste avant.

Pour la toute première carte, la seule restriction est de ne pas choisir un nombre premier plus grand que 50. Le premier joueur qui ne peut plus prendre une carte conformément aux règles a perdu.

Essayez de jouer au jeu d'abord avec un nombre plus petit de cartes, disons 40, pour essayer de trouver une stratégie gagnante pour un des deux joueurs, c.a.d. celui qui commence ou son adversaire. Vous allez voir, les nombres premiers jouent un rôle décisif !

LS4 Ça balance pas mal à Poudlard ! - niveau CM$2-6^{eme}$

PRÉSENTATION

Harry, Hermione et Ron sont face à une nouvelle énigme. Ils doivent déterminer, dans un lot de 15 pierres précieuses d'apparence identique, laquelle est une pierre précieuse magique. La seule information dont ils disposent est que la pierre magique est plus lourde que les quatorze autres.

Pour cela, Dumbledore leur a prêté sa *balance de Roberval* (c'est une balance qui permet uniquement de décider parmi deux poids lequel est le plus lourd, et c'est le seul instrument de mesure moldu dont le directeur de Poudlard se sert).

Hermione réfléchit, puis déclare à ses deux amis :

- "Je sais comment le faire en quatorze manipulations, mais je suis sûre qu'on peut faire beaucoup plus simple que cela. - Beaucoup plus simple ? Tu veux dire avec moins de pesées, répond Harry. - Oui, exactement. Je pense qu'on peut commencer à déterminer le plus grand nombres de pierres pour lesquelles on peut distinguer la plus lourde avec 2 pesées, puis 3 pesées, puis 4 pesées. Je vous laisse faire, Ron et Harry, moi je regarde."

Essayez de suivre les instructions de Hermione. Ron demande alors ;

- "Hermione, qu'est-ce qui change si on ne sait pas si la pierre différente des autres est plus lourde ou plus légère ?"

Connaissez vous la réponse ?

LS5 "Because Seven ate Nine" - niveau CM$2-6^{eme}$

PRÉSENTATION

Tandis que les critères de divisibilité par 2,3,4,5,6,8 et 9 sont souvent connues, il semble qu'un tel critère pour diviser un nombre par 7 n'existe pas. Il est donc temps de regarder de plus près quelques phénomènes mystérieux !

1) Choisissez un nombre a deux chiffres, écrivez un zero a sa droite puis encore une fois le nombre : le résultat est toujours divisible par 7 !

2) Remplacez le zero par un 7.... la règle est toujours valable !

3) Écrivez un nombre a 3 chiffres trois fois de suite : le résultat sera encore divisible par 7 !

4) L'année dernière, Noël tombait sur un samedi. Quel jour de la semaine fêtons nous Noël cette année ?

5) Prenez un nombre a deux chiffres xy avec la propriété que la somme $x+y$ de ces deux chiffres est égale a 7. Chacun des nombres

$$xyx,\ xyyy,\ xxxxy$$

sera divisible par 7 ;

6) Si on additionne deux nombres consécutifs de la suite $1, 6, 6\times 6, 6\times 6\times 6, \ldots$, on obtient a chaque fois un multiple de 7.

Finalement : pouvez vous énoncer un critère de divisibilité par 7 ?

JM1 — Carré magique- niveau CM$2-6^{eme}$

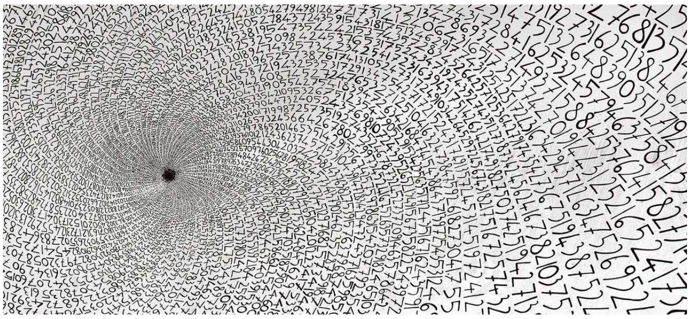
PRÉSENTATION

Remplissez les seize cases (de gauche à droite, et de haut en bas) d'un carré par les nombres de 1 à 16. Choisissez un premier nombre du carré et barrez la ligne et la colonne qui s'y intersectent. Choisissez un deuxième nombre, parmi ceux non barrés, et recommencez le processus. Recommencez une troisième fois. Il ne reste qu'un seul nombre. Que vaut la somme des trois nombres choisis et du dernier restant ?

JM2 — Power Rangers - niveau CM$2-6^{eme}$

QUESTION

Quel est le dernier chiffre de 7^{2008} ?

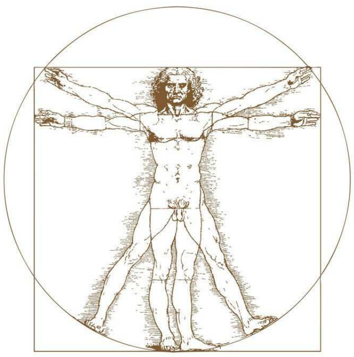


JM3 — La quadrature des polygones (Niveau $3^{\text{è}me}$-Seconde)

PRÉSENTATION

Il est bien connu que, partant d'un cercle donné K, il n'est pas possible de construire un carré de même aire que K *à la règle* - non graduée - *et au compas* (c'est à dire d'utiliser ces instruments pour construire un segment de longueur a tel que a^2 soit égal à l'aire de K).

Nous voulons examiner le problème analogue en partant non pas d'un cercle, mais d'un polygone. Plus précisément, si P est un polygone, est-il possible, à la règle et au compas, de construire une segment de longueur a tel que a^2 soit égal à l'aire de P ?

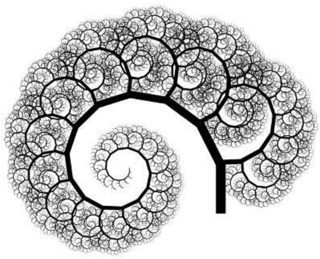


JM4 Fractalement vôtre (Niveau $1^{ères}$-Terminales)

PRÉSENTATION

Une figure fractale est une figure géométrique plane qui est semblable à une sous-partie d'elle-même. Nous voulons, dans ce sujet, préciser et comprendre la définition mathématique d'une figure fractale ainsi que son contexte ce qui devrait permettre en principe de voir comment créer une figure fractale par un processus itératif.

L'objectif principal sera alors d'appliquer cela à l'écriture un programme informatique qui pourra créer des figures fractales. Une des plus importantes applications de ces constructions sont les algorithmes de compression d'images.



JM5 Recouvrements et groupe de Conway (Niveau $1^{ères}$-Terminales)

QUESTIONS

On s'intéresse aux questions suivantes :

1. On regarde un échiquier. Celui-ci peut être recouvert par des dominos "classiques" de taille 1×2. On enlève alors les cases situées aux deux coins en bas à gauche et en haut à droite de cet échiquier. Peut-on toujours utiliser les mêmes dominos pour recouvrir le plateau ?

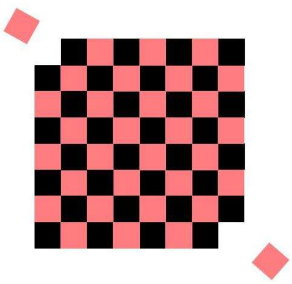
2. On regarde un "échiquier triangulaire" (c'est à dire la version analogue de l'échiquier carré avec un triangle équilatéral). Peut-on le recouvrir avec des dominos de taille 1×3 en les disposant de sorte qu'ils soient parallèles à l'un des côtés ?

La question Question (1) peut être résolue via un argument basé sur le "coloriage" des cases de l'échiquier. En revanche, ce type d'argument n'est pas suffisent pour la Question (2). Pour celle-ci, nous aurons besoin d'un argument plus fin et plus fort. L'idée de Conway est de répondre à la question sur la possibilité du recouvrement en transposant le problème géométrique en un problème algébrique :

$$\begin{array}{ccc} \text{Géométrie} & \longrightarrow & \text{Algèbre} \\ \text{recouvrement} & \longmapsto & \text{équation} \end{array}$$

Ainsi, chaque (potentiel) recouvrement mène à une équation. Si l'on peut montrer que cette équation n'est pas résoluble, alors le recouvrement ne peut exister.

Nous voulons étudier, dans ce sujet, cette méthode ainsi que des exemples et/ou des applications de celle-ci ; en particulier il serait très intéressant d'écrire un programme informatique qui permet de tester si l'équation qui découle du recouvrement peut être résoluble.



FG1 On se retrouve là-bas ! - niveau $3^{eme}, 2^{nde}, 1^{ère}$

PRÉSENTATION

Deux personnes ont prévu de se retrouver pour passer la journée dans un parc d'attractions. Ils se donnent alors rendez-vous sur le parking, chacun se déplaçant au moyen de son propre véhicule.

Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, sans faire attention que le site dispose de n parkings P_1, P_2, ..., P_n qui entourent le parc et forment un polygone (régulier) dont les côtés sont des routes qui relient les parkings entre eux. Naturellement, les deux amis n'ont pas choisi le même parking.

Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes

- à partir d'un parking, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux parkings voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même parking (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Les deux amis se retrouvent-ils presque sûrement (c'est à dire avec probabilité 1) ? Ce résultat dépend-il du nombre de parkings entourant le parc ? Dépend-il des parkings de départ ? On pourra étudier les différentes configurations (*i.e* commencer avec $n = 2, n = 3, n = 4, n = 5$) puis généraliser le résultat. Naturellement, il sera judicieux d'utiliser un ordinateur pour répondre à ces questions.

HS7-1617 — Yoga binomial (Niveau $1^{\grave{e}res}$-Terminales)

PRÉSENTATION

On s'intéresse dans ce sujet à des questions de *combinatoire*, c'est à dire d'étude de combinaisons dans un but de dénombrement.

Par exemple, il est facile d'établir que $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$ correspond au nombre de façons de permuter n éléments entre eux. On procède par récurrence en utilisant le fait que pour permuter $n+1$ éléments, il suffit de choisir où positionner un de ces éléments et de multiplier le nombre de choix par le nombre de permutations des n éléments restants.

C'est ce type d'argument que l'on cherche à utiliser, davantage que du calcul purement algébrique, pour établir des formules faisant intervenir des *coefficients binomiaux* $\binom{n}{k}$, où l'on rappelle que $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble qui en contient n.

QUESTIONS

1. On pourra notamment calculer les sommes

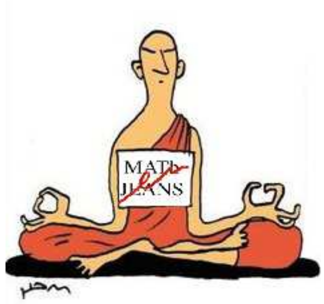
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n},\qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor},\qquad 0\binom{n}{0}+1\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}.$$

2. On prouvera aussi que

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j},\qquad \binom{n+1}{k+1}=\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k},\qquad \binom{n+1}{2k+1}=\sum_{j=k}^{n-k}\binom{j}{k}\binom{n-j}{k}.$$

3. On essaiera de calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2.$$



NV1 — Joue-la comme Hermione ! - niveau $CM2-6^{\grave{e}me}$

PRÉSENTATION

À Poudlard, on doit choisir dans chaque maison un champion pour un tournoi de sorcellerie. À Griffondor, on procède de la façon suivante :

Les candidats sorciers se mettent en cercle. Le premier sorcier est choisi au hasard ; il élimine celui qui est placé directement à sa gauche. Le premier non éliminé, élimine celui directement à sa gauche, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un. Hermione réfléchit et parvient à deviner qui sera le champion de Griffondor. Pouvez-vous le deviner aussi ?

On pourra envisager des variantes en éliminant la $n-$ième personne sur la gauche (avec $n \geq 2$).