ECE - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°10

À rendre le 31 Janvier

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$$

(1) La fonction $h_n : x \mapsto e^x - n(1+e^x)^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaisons de fonctions usuelles dérivables. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$h_n'(x) = e^x(1 - 2n(1+e^x)) < 0,$$
car $n \geq 1$ et $1 + e^x \geq 1$ donc $2n(1+e^x) \geq 2 > 1$.

En particulier, h_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme sa limite en $-\infty$ vaut 0, on en conclut que $h_n < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f_n est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule jamais). De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f_n'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + n.$$
Or, il est clair que
$$f_n'(x) > 0 \iff \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} > -n \iff e^x < n(1+e^x)^2 \iff h_n(x) < 0,$$
ce qui est toujours vrai. Ainsi, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) Il est facile de voir que
$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$
Comme f_n est continue et strictement croissante, le théorème de bijection assure qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce même théorème affirme que les variations de la bijection réciproque sont les mêmes. Ainsi, f_n^{-1} est encore continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(3) On voit que
$$\frac{f_n(x)}{x} = \frac{1}{x + xe^x} + n \longrightarrow n, x \to \pm\infty.$$
Par ailleurs,
$$f_n(x) - nx = \frac{1}{1+e^x} \longrightarrow \begin{cases} 1, & \text{lorsque } x \to -\infty \\ 0, & \text{lorsque } x \to +\infty \end{cases}$$
Par conséquent, la droite d'équation $y = nx - 1$ est asymptote (oblique) à la courbe de f en $-\infty$ alors que $y = nx$ est asymptote (oblique) à la courbe en $+\infty$.

(4) Il suffit d'appliquer le théorème de bijection: 0 admet un unique antécédent par f_n, c'est à dire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On peut la noter $u_n = f_n^{-1}(0)$.

(5) Afin d'encadrer u_n, on compare les images des éléments de l'encadrement

$$f_n(0) = \frac{1}{2} > 0, \quad \text{et} \quad f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{-e^{-1/n}}{1 + e^{-1/n}} < 0.$$

Comme

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < 0 < f_n(0)$$

et que f_n^{-1} est strictement croissante, on a donc

$$-\frac{1}{n} < u_n = f_n^{-1}(0) < 0,$$

ce qui est l'encadrement voulu.

(6) Le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité précédente permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(7) Par définition de u_n,

$$\frac{1}{1+e^{u_n}} + nu_n = 0 \Longleftrightarrow -2nu_n = \frac{2}{1+e^{u_n}}.$$

Or, $u_n \to 0$, donc $1 + e^{u_n} \to 2$, et on a bien

$$-2nu_n \longrightarrow 1, n \to +\infty.$$

Exercice 2. (Continuité et dérivabilité)

(1) La fonction f est clairement continue en 0: Par croissance comparée, $x\ln(x) \longrightarrow 0$, $x \to 0$ et donc $x^2 - x\ln(x) - 1 \longrightarrow -1 = f(0)$, $x \to 0$. En revanche, elle n'y est pas dérivable

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 - x\ln(x) - 1 - (-1)}{x} = \frac{x^2 - x\ln(x)}{x} = x - \ln(x) \longrightarrow +\infty, x \to 0.$$

En particulier, la courbe de f admet une tangente verticale en 0.

(2) (a) On connait le DL de l'exponentielle en 0:

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{et} \quad e^{-x} = 1 - x + o(x).$$

Ainsi,

$$g(x) = \frac{2x}{1 + x + o(x) - 1 + x + o(x)} = \frac{2x}{2x + o(x)} = \frac{1}{1 + o(1)} \longrightarrow 1 = g(0), x \to 0$$

et g est continue en 0.

(b) Concernant la dérivabilité, comme le suggère le texte, il est nécessaire d'utiliser un DL plus d'ordre plus avancé (on s'en convaincra en essayant de déterminer la limite cherchée avec le DL à l'ordre 1:) On voit alors que

$$e^x - e^{-x} = 2x + o(x^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - 1}{x} &= \frac{\frac{2x}{e^x - e^{-x}} - 1}{x} \\ &= \frac{2x - (e^x - e^{-x})}{x(e^x - e^{-x})} \\ &= \frac{o(x^2)}{2x^2 + o(x^3)} \\ &= \frac{o(1)}{2 + o(x)} \\ &\longrightarrow 0, x \to 0 \end{aligned}$$

Ainsi, g est bien dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.