# Devoir Maison n°16

*Solution*

*Ce Devoir Maison reprend l'intégralité du sujet* **ECRICOME 2016**.

**Exercice 1.**

**Partie A**

(1) La matrice nulle correspond au choix de $(x, y) = (0, 0)$ et est donc clairement un élément de $E$. De plus, si $M$ et $N$ sont des éléments de $E$, on constate qu'il existe $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M = x_1A + y_1B$ et $N = x_2A + y_2B$. Par conséquent, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda M + \mu N = \lambda(x_1A + y_1B) + \mu(x_2A + y_2B) = (\lambda x_1 + \mu x_2)A + (\lambda y_1 + \mu y_2)B,$$

ce qui est bien élément de $E$ (avec $x = \lambda x_1 + \mu x_2$ et $y = \lambda y_1 + \mu y_2$). Ainsi, $E$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et de plus, $\{A; B\}$ en forme bien une base.

(2) On cherche une matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ telle que $AP = PD_A$. Il suffit de résoudre le système correspondant:

$$AP = PD_A \iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 3 - 2a + 2d & = & 1 \\ -6 - 2b + 2e & = & -4 \\ 3 - 2c + 2f & = & 3 \\ -1 + 4a - 2d & = & a \\ 2 + 4b - 2e & = & 2b \\ -1 + 4c - 2f & = & 3c \\ -4a - d & = & d \\ 4b - e & = & 2e \\ 4c - f & = & 3f \end{array}\right.$$

$$\iff P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Utilisons la méthode du pivot pour déterminer $P^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_2 \leftarrow L_3 + 2L_1$. On obtient:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On fait ensuite $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On peut donc conclure (après avoir vérifié que $PP^{-1} = I_3$) que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) On a $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $BX_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -X_2$ et $BX_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_3$. Ceci se réécrit comme

$$BP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ou encore, de manière équivalente,

$$B = PD_BP^{-1}, \qquad \text{où } D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(5) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$M(x, y) = xA + yB = xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} = PD(x, y)P^{-1}$$

où on a posé $D(x, y) = xD_A + yD_B$.

(6) On voit alors que $M(x, y)$ est inversible si et seulement si $D(x, y)$ est inversible. Or,

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $2x - y \neq 0$ et $3x - y \neq 0$ (matrice diagonale). Par conséquent, $M(x, y)$ est donc inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $2x - y \neq 0$ et $3x - y \neq 0$.

(7) On a $B^2 = PD_BP^{-1}PD_BP^{-1} = PD_B^2P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = -PD_BP^{-1} = -B \in E.$

De même, on a $A^2 = PD_AP^{-1}PD_AP^{-1} = PD_A^2P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}.$

Par suite,

$$\begin{aligned}
A^2 \in E &\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : A^2 = xA + yB \\
&\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} \\
&\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = xD_A + yD_B \\
&\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 \\ 2x - y = 4 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \\
&\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases} \qquad \text{impossible !}
\end{aligned}$$

En conclusion, $A^2 \notin E$.

**Partie B**

(1) Par lecture de l'énoncé : $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$CX_n = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Enfin, $C = A + 3B = M(1, 3)$.

(3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
**Initialisation :** On a $C^0 = I$, donc $C^0 X_0 = I X_0 = X_0$. On a bien l'hypothèse vérifiée au rang $n = 0$.
**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que, pour un certain $n \geq 0$, $X_n = C^n X_0$. Mais alors,

$$X_{n+1} = CX_n \underset{\text{par (HR)}}{=} CC^n X_0 = C^{n+1} X_0.$$

La propriété est bien héréditaire. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

(4) D'après la question (6) de la partie $A$, on a

$$C = A + 3B = P(D_A + 3D_B)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On peut alors montrer par une récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C^n = P(D_A + 3D_B)^n P^{-1}.$$

Il suit que

$$C^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

et que

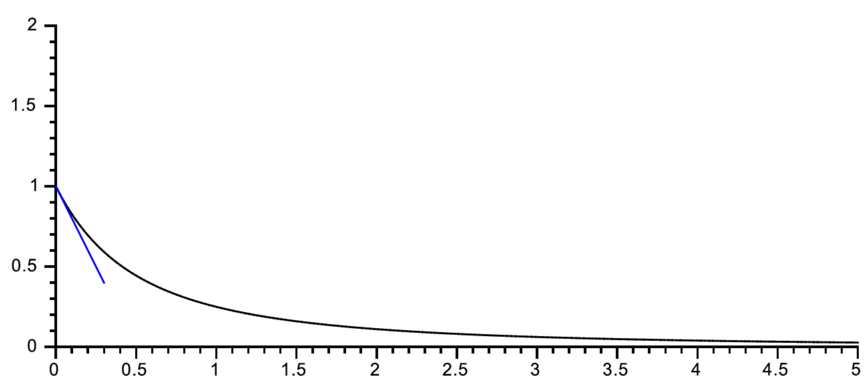
$$X_n = C^n X_0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n \\ -1+3(-1)^n \\ -2+4(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Comme $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} a_n = 1-2(-1)^n \\ b_n = -1+3(-1)^n \\ c_n = -2+4(-1)^n \end{cases}$$

**Exercice 2.**

(1) (a) $g_0$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ (comme quotient de deux fonctions $C^\infty$ avec un dénominateur non nul), strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ comme inverse d'une fonction strictement croissante et (strictement) positive.
$\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2} = 0.$
L'équation de la tangente en 0 est $y = g_0'(0)(x-0)+g_0(0)$.
Or, pour tout $x \geq 0$, $g_0'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^3}$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = -2x+1$.
*En fait, il s'agit d'une demi-tangente, car $g_0$ n'est pas définie sur $]-\infty, 0[$.*




(b) Soit $n \geq 1$.
$g_n$ est $C^\infty$ sur $[0,+\infty[$ comme composée, puissance et quotient de fonctions usuelles et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad g_n'(x) = \frac{n\dfrac{1}{1+x}(\ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4}$$

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad g_n'(x) = \frac{\overbrace{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}}^{\geq 0}(n-2\ln(1+x))}{\underbrace{(1+x)^4}_{\geq 0}}$$

D'où $g_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow n-2\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 2\ln(1+x) \Leftrightarrow 1+x \leq e^{n/2} \Leftrightarrow x \leq e^{n/2}-1$.
Comme $n/2 > 0$, $e^{n/2} > 1$ et donc $e^{n/2}-1 \in [0,+\infty[$.
On a donc :

| $x$ | $0$ | | $e^{n/2}-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g_n)$ | $0$ | $\nearrow$ | $M_n$ | $\searrow$ | $0$ |

$M_n = g_n(e^{n/2}-1)$
$g_n(0) = \dfrac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) \underset{\text{en posant } y=1+x}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(\ln y)^n}{y^2} = 0$ par croissances comparées.

(c) D'après le tableau de variations de $g_n$, $g_n$ admet un maximum sur $[0,+\infty[$ en $e^{n/2}-1$ qui vaut :

$$M_n = g_n(e^{n/2}-1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

$\ln(M_n) = n\ln\left(\dfrac{n}{2e}\right)$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty.$$

(d) Pour tout $n \geq 1$,

$$x^{3/2}g_n(x) = \frac{x^{3/2}\ln(1+x)^n}{x^2(1+2/x+1/x^2)} = \frac{\ln(1+x)^n}{x^{1/2}} \times \frac{1}{1+2/x+1/x^2} \longrightarrow 0,\ x\to+\infty$$

par croissances comparées.

(2) (a) Soit $A > 0$.

$$\int_0^A g_0(t)dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1 \underset{A\to+\infty}{\to} 1,$$

donc $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)dt$ converge et vaut 1.

(b) Soit $n \geq 1$.

- $g_n$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ sont continues et positives sur $[1,+\infty[$.
- $g_n(t)$ est négligeable devant $1/t^{3/2}$ (quand $t\to+\infty$) d'après (1)($d$).
- Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge (Riemann et $3/2 > 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)dt$ converge aussi.
- Enfin, comme $g_n$ est continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt$ existe.

Par suite, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge.

(c) Soit $A > 0$.

Posons $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$, $u'(t) = \dfrac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n$, $v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$, $v(t) = -\dfrac{1}{1+t}$.

Comme $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(t)dt &= \left[-\frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n \frac{1}{1+t}dt \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A g_n(t)dt.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A g_{n+1}(t)dt = I_{n+1}$, $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A g_n(t)dt = I_n$ (car $I_n$ et $I_{n+1}$ convergent) et $\lim\limits_{A\to+\infty} -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$ (par croissances comparées),
donc, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient bien :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

(d) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.
**Initialisation :** On a $I_0 = 1$ et $0! = 1$, donc la formule est vraie pour $n = 0$.
**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $I_n = n!$. Alors

$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!,$$

Ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(3) (a) • $f_n$ est positive sur $\mathbb{R}$.
• $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
• $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge et vaut $\frac{1}{n!}n! = 1$.
$f_n$ peut donc bien être considérée comme une densité de probabilité.

(b) Soit $n \geq 1$.
• $t \mapsto tf_n(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.
• $\frac{1/t}{tf_n(t)} = \frac{n!(1+t)^2}{t^2(\ln(1+t))^n} = n!\frac{1}{\ln(1+t)^n} \times \frac{1}{1+2/t+1/t^2} \longrightarrow 0, t \to +\infty$ donc $\frac{1}{t}$ est négligeable devant $tf(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
• Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge (Riemann de paramètre $1 \leq 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} tf_n(t)dt$ diverge aussi.
Donc $\int_0^{+\infty} tf_n(t)dt$ diverge, donc $X_n$ n'admet pas d'espérance.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x < 0$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.

(d) D'après les calculs faits au (2)(a), pour tout $x \geq 0$,

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

(e) En reprenant les calculs faits en (2)($c$), (en remplaçant $n$ par $k-1$ et $A$ par $x$, on obtient :

$$\begin{aligned}F_k(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x g_k(t)dt &= \frac{1}{k!}\left(-\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + k\int_0^x g_{k-1}(t)dt\right) \\ &= -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x g_{k-1}(t)dt = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x),\end{aligned}$$

et on a donc bien :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(f) En sommant l'égalité précédente pour $k = 1..n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}(F_k(x) - F_{k-1}(x)) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc, en télescopant à gauche de l'égalité :

$$F_n(x) - F_0(x) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc

$$F_n(x) = F_0(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(g) • Pour tout $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
• Pour tout $x \geq 0$,

$$F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

(série exponentielle de paramètre $\ln(1+x)$, donc convergente)

$$\underset{n\to+\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x}\exp(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1+x}{1+x} = 0.$$

**Exercice 3.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\{1, ..., N\}$. On dit que $X$ et $Y$ sont *échangeables* si, pour tous entiers $i, j \in \{1, ..., N\}$

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P((X = j) \cap (Y = i)).$$

(1) Si $X$ et $Y$ sont deux variables indépendantes et de même loi, alors, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} P(X = i \cap Y = j) &= P(X = i)P(Y = j) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)}\\ &= P(Y = i)P(X = j) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi)}\\ &= P(X = j \cap Y = i) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes),}\end{aligned}$$

donc $X$ et $Y$ sont échangeables.

(2) Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $X$ et $Y$ sont échangeables. Alors,

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) && \text{(par la FPT)}\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j \cap Y = i) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont interchangeables)}\\ &= P(Y = i) && \text{(par la FPT)}\end{aligned}$$

On a donc bien, $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(X = i) = P(Y = i)$ ou encore, $X$ et $Y$ suivent la même loi.

(3) L'exemple suivant vise à montrer que la réciproque est fausse. Soient $n, b, c$ trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement $n$ boules noires et $b$ boules blanches. On pioche une boule dans l'urne. On définit une première variable aléatoire $X$ comme suit. Si la boule est est noire, alors $X = 1$ sinon $X = 2$.

(a) La fonction s'écrit sans difficulté, au moyen de la fonction `rand()` en remarquant que la probabilité de tirer une noire au premier coup est $n/(n+b)$.

```
function y=tirage(n,b)
    if rand()<n/(n+b) then
        y=1;
    else
        y=2;
    end
endfunction
```

(b) Il est clair que $X(\Omega) = \{1; 2\}$. De plus,

$$P(X=1) = \frac{n}{n+b}, \quad \text{et} \quad P(X=2) = \frac{b}{n+b}.$$

On remet la boule tirée dans l'urne ainsi que $c$ boules supplémentaires de la couleur tirée. On tire une seconde boule et on introduit la variable aléatoire $Y$ qui vaut 1 si la nouvelle boule tirée est noire et 2 sinon.

(c) On a encore $Y(\Omega) = \{1; 2\}$. Pour déterminer la loi de $Y$, on utilise la formule des probabilités totales en conditionnant par la première boule obtenue (c'est à dire par $X$).

$$\begin{aligned}
P(Y=1) &= P(Y=1 \,|\, X=1)P(X=1) + P(Y=1 \,|\, X=2)P(X=2) \\
&= \frac{n+c}{n+b+c} \cdot \frac{n}{n+b} + \frac{n}{n+b+c} \cdot \frac{b}{n+b} \\
&= \frac{n(n+b+c)}{(n+b)(n+b+c)} \\
&= \frac{n}{n+b} \\
&= P(X=1)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P(Y=2) &= P(Y=2 \,|\, X=1)P(X=1) + P(Y=2 \,|\, X=2)P(X=2) \\
&= \frac{b}{n+b+c} \cdot \frac{n}{n+b} + \frac{b+c}{n+b+c} \cdot \frac{b}{n+b} \\
&= \frac{b(n+b+c)}{(n+b)(n+b+c)} \\
&= \frac{b}{n+b} \\
&= P(X=2)
\end{aligned}$$

On constate que $X$ et $Y$ suivent la même loi.

(d) Pour montrer que $X$ et $Y$ sont échangeables, il suffit de vérifier que

$$P((X=1) \cap (Y=2)) = P((Y=1) \cap (X=2)).$$

Or,

$$\begin{array}{rcl} P((X=1)\cap(Y=2)) & = & P(Y=2\,|\,X=1)P(X=1) \\ & = & \dfrac{b}{n+b+c}\times\dfrac{n}{n+b} \\ & = & \dfrac{n}{n+b+c}\times\dfrac{b}{n+b} \\ & = & P(Y=1\,|\,X=2)P(X=2) \\ & = & P((Y=1)\cap(X=2)), \end{array}$$

et les deux variables $X$ et $Y$ sont bien échangeables.

(e) On constate qu'elles ne sont par contre pas indépendantes. En effet,

$$\begin{array}{rcl} P((Y=1)\cap(X=1)) & = & P(Y=1\,|\,X=1)P(X=1) \\ & = & \dfrac{n+c}{n+b+c}\times\dfrac{n}{n+b} \\ & \neq & \left(\dfrac{n}{n+b}\right)^2 \\ & \neq & P(X=1)P(Y=1). \end{array}$$