ECE - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°9

À rendre le 25 Janvier

Exercice 1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) En introduisant la matrice $N = T - I$, exprimer T^n en fonction de n, I et T.
(2) Déterminer une matrice P telle que $AP = PT$, où P sera de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que $A - I = PNP^{-1}$ puis que $A^2 - 2A + I = PN^2P^{-1}$.
(4) Exprimer A^n en fonction de n, I, A et A^2.

Exercice 2. Pour quelles valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ et $c > -1$ la fonction f est-elle prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier ?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+4x} - a}{bx}, & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{-b\ln(1 - x + c)}{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) En considérant la suite $a_n = \sqrt{2}/n$ et à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que f n'est pas continue en 0.
(2) Adapter le raisonnement pour montrer que f n'est continue en aucun point rationnel.
(3) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
  (a) Montrer que la suite $x_n = \lfloor nx \rfloor / n$ a pour limite x et que tous les termes sont rationnels.
  (b) En déduire que f n'est pas continue en x.

(Remarque: on a donc montré que la fonction f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.)