



Concours Blanc n°4

Durée : 4 heures

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels.

Soit d l'application définie sur E qui à tout polynôme P , associe le polynôme $d(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P .

- (1) Rappeler sans démonstration la dimension de E et la base canonique \mathcal{B} de E .
- (2) Montrer que d est un endomorphisme de E et donner la matrice associée à d dans la base \mathcal{B} .
- (3) Déterminer le noyau de d , $\text{Ker}(d)$, l'image de d , $\text{Im}(d)$, ainsi que leurs dimensions respectives.
- (4) Déterminer les valeurs propres de d ainsi que les polynômes propres associés (*i.e.* les vecteur propres). L'endomorphisme d est-il diagonalisable?

On désigne, pour $k \in \mathbb{N}$, par (d^k) , la suite d'endomorphismes de E définie par :

$$d^0 = I, \quad d^{k+1} = d \circ d^k,$$

où I représente l'endomorphisme identité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(d^k)$ désigne le noyau de d^k .

- (5) (a) Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, le sous espace $\text{Ker}(d^k)$ ainsi que sa dimension.
(b) Vérifier que pour tout $k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$,

$$d(\text{Ker}(d^k)) \subset \text{Ker}(d^k).$$

- (c) Soit P un polynôme de degré r , avec $r \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$. Montrer que la famille $\{d^k(P) : 0 \leq k \leq r\}$ est libre.

- (6) Dans cette question, on cherche à déterminer les sous espaces vectoriels F de E tels que

$$d(F) \subset F.$$

- (a) Montrer que, si $P \in F$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d^k(P) \in F$.
- (b) On suppose que $\dim F = 1$. Montrer que F est un sous-espace propre de d . En déduire F .
- (c) On suppose que $\dim F = 2$. Montrer qu'il existe dans F un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. En déduire F .
- (d) Déterminer F dans le cas où $\dim F = 3$.

Problème

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X , et $\text{cov}(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y .

Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X .

On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes si pour tout n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) de réels, les événements $[X_1 \leq x_1], [X_2 \leq x_2], \dots, [X_n \leq x_n]$ sont indépendants.

L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle.

La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

- (1) (a) Rappeler la valeur de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . En déduire la valeur de I_n en fonction de n .

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$). On pose

$$Y = X_1 - X_2, \quad T = \max(X_1, X_2), \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, X_2).$$

- (2) Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.
- (3) (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq x])$, pour tout réel x .
- (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$, $V(Y)$.
- (4) Déterminer pour tout réel z , $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaitre la loi de Z , puis en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
- (5) (a) Montrer que pour tout réel t , on a

$$F_T(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda})^2, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- (b) Exprimer pour tout réel t , $f_T(t)$.
- (c) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer, à l'aide de changements de variables affines, que

$$E(T) = \frac{3}{2\lambda}, \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{5}{4\lambda^2}.$$

(6) On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T . Montrer que $r = 1/\sqrt{5}$.

- (7) (a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.
 (b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.
 (c) Montrer que pour tout réel y , l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$$

est convergente et qu'elle vaut $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$. (On distinguera deux cas : $y \geq 0$ et $y < 0$.)

- (d) Établir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} ; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y .
 (e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie II. Loi géométrique

Soient p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).

On pose :

$$Y = X_1 - X_2, \quad T = \max(X_1, X_2), \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, X_2).$$

On rappelle que

$$T + Z = X_1 + X_2 \quad \text{et} \quad T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|.$$

- (8) (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.
 (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(X_1 - X_2)$, et $V(X_1 - X_2)$.
 (c) Établir la relation

$$P([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}.$$

- (9) (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.
 (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité

$$[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k].$$

- (c) En déduire la relation suivante

$$P(T = k) = 2P(X_1 = k) - P(Z = k).$$

- (d) Établir la formule :

$$V(T) = \frac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}.$$

- (10) (a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$. En déduire, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $P([Z = j] \cap [Z = T])$.
 (b) Montrer que pour tout couple $(j, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$P([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2p^2q^{2j+l-2}.$$

- (c) Montrer, en distinguant les trois cas $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$, que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$P([X_1 - X_2 = k]) = \frac{pq^{|k|}}{1+q}.$$

- (d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.
 (e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.

- (11) (a) À l'aide du résultat de la Question 10.e, calculer $\text{cov}(Z, T)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
- (b) Calculer en fonction de q , le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T .
- (c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T) .
- (d) Déterminer pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
- (e) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans \mathbb{N}^* , dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$. Calculer $E(D_j)$.

Partie III. Convergences

Dans les questions 12 à 15, λ désigne un paramètre réel strictement positif, **inconnu**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad \text{et} \quad J_n = \lambda S_n.$$

- (12) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(J_n)$ et $V(J_n)$.

- (13) On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par la formule

$$f_{J_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

- (a) À l'aide du théorème de transfert, établir pour tout entier $n \geq 3$, l'existence de $E\left(\frac{1}{J_n}\right)$ et de $E\left(\frac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.
- (b) On pose, pour tout entier $n \geq 3$,

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{n}{S_n}.$$

Justifier que $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur de λ . Est-il sans biais? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda}_n$ en λ .

- (14) Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α . On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

- (a) Énoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.
- (b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement

$$P([-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha]) = 1 - \alpha.$$

- (c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle

$$\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n \right]$$

est un intervalle de confiance de λ au risque α . On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda}_n$ sur le n -échantillon.

- (15) Avec le n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) , on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α .
- (a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ . Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?
- (b) Établir l'égalité

$$\beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right).$$

- (c) En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible?

Dans les questions 16 à 18, on suppose que $\lambda = 1$.

- (16) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $x \geq 0$, on pose

$$g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t) dt \quad \text{et} \quad h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t) dt.$$

- (a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$ et $g_n(x)$.
- (b) Déterminer, pour tout réel t , l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t .
Établir, pour tout entier $n \geq 2$, la relation :

$$g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x).$$

- (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $x \geq 0$, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x , et de $F_{T_1}(x)$, $F_{T_2}(x)$, ..., $F_{T_n}(x)$.
- (d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.
- (e) Déduire des questions c) et d) l'existence de $E(T_n)$ et montrer que

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- (17) On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (G_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$G_n = T_n - E(T_n).$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet *sans démonstration* que la suite (γ_n) est convergente; on note γ sa limite.

- (a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a

$$F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n.$$

- (b) En déduire que, pour tout x réel, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}.$$

- (c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F_G(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$$

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

-
- (18) (a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = F_X(X)$.
- (b) Écrire une fonction, sous **SciLab**, d'en-tête `y=Gumbel()` qui permet de simuler la variable aléatoire G . On supposera que la constante γ est déjà définie dans **SciLab** et stockée sous `gamma`. On utilisera la commande `rand()` qui permet de simuler la loi uniforme sur $]0; 1[$.