EXERCICE

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. On confond polynôme de E et fonction polynômiale associée définie sur $\mathbb{R}$.
Soit d l'application définie sur E qui à tout polynôme P , associe le polynôme $d(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P.

1. E a pour base canonique $\mathcal{B} = (1\ ;\ X\ ; X^2\ ;\ X^3)$ et $\dim(E) = 4$
2. Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ il existe alors a_0, a_1, a_2, a_3 réels tels que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$
   P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 \in \mathbb{R}_3[X]$ et a pour coordonnées dans $\mathcal{B}$
   $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
   Donc d est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ associé à cette matrice dans la base $\mathcal{B}$
   C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ e sa matrice dans $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $P' = 0 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$
   Conclusion : $\boxed{\ker(d) = \text{Vect}(1) \text{ et } \dim(\ker(d)) = 1}$
   Par le théorème du rang, $\dim((d)) = 4 - 1 = 3$
   Et comme $1 = d(X)$, $X = d\left(\frac{1}{2}X^2\right)$ et $X^2 = d\left(\frac{1}{3}X^3\right)$ sont dans l'image et forment une famille libre, ils sont une base de l'image.
   Conclusion : $\boxed{\text{Im}(d) = \text{Vect}(1\ ;\ X\ ;\ X^2) = \mathbb{R}_2[X]}$
4. Comme M est triangulaire, les valeurs propres de d sont sur la diagonale :
   Conclusion : la seule valeur propre de d est 0
   le sous espace associé est $\ker(d)$
   les polynômes propres associés sont les constantes, non nulle
   Si d était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $M = P0P^{-1} = 0$, ce qui est faux.
   Conclusion : $\boxed{d \text{ n'est pas diagonalisable.}}$
   On désigne par $\left(d^k\right)_{k\geq 0}$, la suite d'endomorphismes de E définie par : $d^0 = I$, où I représente l'endomorphisme identité et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $d^{k+1} = d^k \circ d$. Pour tout k de $\mathbb{N}$, $Ker\ d^k$ désigne le noyau de d^k.
5. a) Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ alors
      - $P' = 0 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$ donc $\ker(d^1) = \text{Vect}(1)$ de dimension 1
      - $P'' = 0 \Longleftrightarrow a_2 = a_3 = 0$ et donc $\ker(d^2) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ de dimension 2
      - $P''' = 0 \Longleftrightarrow a_3 = 0$ et donc $\ker(d^3) = \mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3
      - et de même $\ker(d^4) = \mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4

      Si $u \in d\left(\ker\left(d^k\right)\right)$ alors il existe $v \in \ker\left(d^k\right)$ tel que $u = d(v)$
      On a alors $d^k(u) = d^{k+1}(v) = d\left(d^k(v)\right) = d(0)$ car $v \in \ker\left(d^k\right)$ et $u \in \ker\left(d^k\right)$
      Conclusion : $\boxed{d\left(\ker\ d^k\right) \subset \ker\ d^k}$

b) Le degré de la dérivée d'un polynôme non constant est un de moins que celui du polynôme. Pour $k \leq r$ on a $\deg\left(d^k(P)\right) = \deg(P) - r$
$\left(d^k(P)\right)_{0 \leq k \leq r}$ est donc formée de polynômes tous de degré différents. donc elle est libre.

6. Dans cette question, on cherche à déterminer les sous espaces vectoriels F de E tels que $d(F) \subset F$.

a) On suppose que $\dim F = 1$.
Soit $u \neq 0$ dans F alors (u) est libre de 1 vecteur de F et comme $\dim(F) = 1$ alors (u) est une base de F et $F = \text{Vect}(u)$
Donc si $d(F) \subset F$ alors $d(u) \in F = \text{Vect}(u)$ donc il existe α tel que $d(u) = \alpha u$ et pour tout $xu \in F$ on a $d(xu) = \alpha xu$ (par linéarité)
Donc F et le sous espace propre associé à α.
La seule valeur propre de d étant 0 on a alors $F = \ker(d) = \mathbb{R}_0[X]$

b) On suppose que $\dim F = 2$.
Si tous les éléments de F sont de degré inférieur strictement à 1 alors $F \subset \mathbb{R}_0[X]$ et sa dimension est donc inférieure ou égale à 1.
Donc il existe un polynôme P dans F de degré r supérieur ou égal à 1.
Soit P un polynôme de F de degré supérieur ou égal à 1.
Comme $d(F) \subset F$, par récurrence, pour tout k, $d^k(F) \subset F$ et $d^k(P) \in F$
Et comme $\left(d^k(P)\right)_{0 \leq k \leq r}$ est libre formée de $r+1$ polynômes, , elle ne peut pas (en dimension 2) avoir plus de deux vecteurs, donc $r \leq 1$
Donc $F \subset \mathbb{R}_1[X]$ et par égalité des dimensions
Conclusion : $\boxed{F = \mathbb{R}_1[X]}$

c) On suppose que $\dim F = 3$. On note $\tilde{d}$ l'endomorphisme de F défini par : pour tout P de F, $\tilde{d}(P) = d(P)$.
Comme précédemment, pour tout P de F de degré r on a $d^k(P) \in F$ et $\left(d^k(P)\right)_{0 \leq k \leq r}$ libre donc $r \leq 2$.
Les polynômes de F sont donc tous de degré inférieur ou égal à 3 et donc d^3 est nulle sur F.
Conclusion : $\boxed{\left(\tilde{d}\right)^3 = 0 \text{ et comme } F \subset \mathbb{R}_2[X] \text{ et sont de même dimension } F = \mathbb{R}_2[X]}$.

PROBLEME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $Cov(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.
Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.
On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes si pour tout $n-uplet$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de réels, les évènements $[X_1 \leq x_1], [X_2 \leq x_2], ..., [X_n \leq x_n]$ sont indépendants.

L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle.
La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1. a) La densité d'une loi $\varepsilon(1)$ est $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $\mathbb{R}^-$ donc
Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1}$
On peut le démontrer par récurrence (mais cela est plutôt l'objet de la question suivante)
Astuce : $t^n e^{-t} = t^n e^{-t/2} e^{-t/2}$ avec $t^n e^{-t/2} = t^n / e^{t/2} \to 0$ quand $t \to +\infty$ ($t^n = o\left(e^{t/2}\right)$)
donc $t^n e^{-t} = o\left(e^{-t/2}\right)$
Or $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt$ converge, donc par majoration de fonctions positives,
Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt \text{ converge également}}$
On pose alors $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et,.pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
b) Soit $M \geq 0$ alors $\int_0^M t^n e^{-t}dt = \cdots$
Soient $u(t) = t^n : u'(t) = nt^{n-1}$ et $v'(t) = e^{-t} : v(t) = -e^{-t}$ avec u et v C^1 sur $\mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\int_0^M t^n e^{-t}dt &= \left[-t^n e^{-t}\right]_0^M - \int_0^M -nt^{n-1}e^{-t}dt \\ &= -M^n e^{-M} + n\int_0^M t^{n-1}e^{-t}dt \\ &\to nI_{n-1} \text{ quand } M \to +\infty\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : I_n = nI_{n-1}}$
Et comme de plus $I_0 = 1$, on reconnaît alors la suite factorielle
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : I_n = n!}$

Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$).
on pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Si $X_1 \geq X_2$ alors $Y = X_1 - X_2$, $T = X_1$ et $Z = X_2$ donc $|X_1 - X_2| = X_1 - X_2$
et donc$T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.
Et de même sir $X_1 \leq X_2$ où $|X_1 - X_2| = X_2 - X_1$
3. a) Comme $X_1 \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ on a $V(X_1) = 1/\lambda^2$ et $P([X_1 \leq x]) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{array}\right.$
b) On a donc $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_1) = 2/\lambda$
et $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2/\lambda^2$ par indépendance.
et de même, $E(Y) = E(X_1 - X_2) = 0$ et $V(Y) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = 2/\lambda^2$.
4. F_Z est la fonction de répartition de Z.
Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $(Z \leq z) = (\min(X_1, X_2) \leq z)$ n'est pas simple à traduire.
$(Z > z) = (\min(X_1, X_2) > z) = (X_1 > z \cap X_2 > z)$ indépendants donc
$$\begin{aligned}F_Z(z) &= \mathrm{P}(Z \leq z) = 1 - \mathrm{P}(\min(X_1, X_2) > z) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X_1 \leq z)\,\mathrm{P}(X_2 \leq z) \text{ par indépendance} \\ &= \left\{\begin{array}{cc} 1 - \left(e^{-\lambda z}\right)^2 & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{array}\right.\end{aligned}$$

et comme $1-\left(e^{-\lambda z}\right)^2 = 1-e^{-2\lambda z}$, on reconnaît la fonction de répartition de $\varepsilon(2\lambda)$

Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \varepsilon(2\lambda)\,,\ (Z) = \dfrac{1}{2\lambda} \text{ et } V(Z) = \dfrac{1}{4\lambda^2}}$

5. a) $(T \leq t) = (\max(X_1, X_2) \leq t) = (X_1 \leq t \cap X_2 \leq t)$ indépendants donc

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathrm{P}(X_1 \leq t)\,\mathrm{P}(X_2 \leq t) \ \text{ par indépendance} \\ &= \begin{cases} \left(1-e^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction F_T est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $[0, +\infty[$
En 0^- : $F_T(t) = 0 \to 0 = F_T(0)$ donc F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc T est à densité et une densité de T est $f_T(t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$

b) On a

$$\begin{aligned} \int_0^M t f_T(t)\,dt &= \int_0^M t2\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)dt \\ &= \left(2\int_0^M t\lambda e^{-\lambda t}dt - \int_0^M t2\lambda e^{-2\lambda t}dt\right) \\ &\to \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} \text{ quand } M \to +\infty \end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda$ (espérance de $\varepsilon(\lambda)$)

Conclusion : $\boxed{T \text{ a une espérance et } E(T) = \dfrac{3}{2\lambda}}$

Et pour l'espérance de T^2 :
Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^M t^2 f_T(t)\,dt &= \int_0^M t^2 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)dt \\ &= \left(2\int_0^M t^2\lambda e^{-\lambda t}dt - \int_0^M t^2 2\lambda e^{-2\lambda t}dt\right) \\ &\to \frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{4\lambda^2} = \frac{7}{2\lambda^2} \text{ quand } M \to +\infty \end{aligned}$$

Donc T^2 a une espérance et $E(T^2) = \dfrac{7}{2\lambda^2}$ donc T a une variance et

Conclusion : $\boxed{V(T) = \dfrac{7}{2\lambda^2} - \dfrac{9}{4\lambda^2} = \dfrac{5}{4\lambda^2}}$

N.B. cela permet de valider la loi de T
Ou bien, en suivant le conseil donné, avec le changement de variable $x = \lambda t$ ou plus simplement $t = x/\lambda$
$dt = dt/\lambda$ et $t = 0$ pour $x = 0$ et $t = M$ pour $x = \lambda M$

$$\begin{aligned} \int_0^M t\lambda e^{-\lambda t}dt &= \int_0^{\lambda M} \frac{x}{\lambda}e^{-x}dx \\ &\to \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \frac{1}{\lambda}I_1 = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

6. On a $X_1 + X_2 = Z + T$ et comme $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ par indépendance, et que $V(Z+T) = V(Z) + V(T) + 2\operatorname{cov}(Z,T)$ (admis) alors

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Z,T) &= \frac{1}{2}\left[V(Z+T) - V(Z) - V(T)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[V(X_1) + V(X_2) - V(Z) - V(T)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{5}{4\lambda^2}\right]\\ &= \frac{1}{4\lambda^2}\end{aligned}$$

et donc, le coefficient de corrélation linéaire est :

$$\begin{aligned}r &= \frac{\operatorname{cov}(Z,T)}{\sqrt{V(Z)\,V(T)}}\\ &= \frac{\frac{1}{4\lambda^2}}{\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}\frac{5}{4\lambda^2}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

7. a) Comme $Y = X_1 - X_2$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{R}$ et $|Y|(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-X_2}(x) = \mathrm{P}(-X_2 \leq x) = \mathrm{P}(X_2 \geq -x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   Cette fonction est continue sur $]-\infty, 0]$et $]0, +\infty[$ et en 0^+ : $F_{-X_2}(x) = 1 \to 1 = F(0)$ et elle est C^1 sur $\mathbb{R}^*$

   Donc $-X_2$ est bien à densité et une densité est $f_{-X_2}(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   c) Si $y \geq 0$ on a $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geq y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$ donc, pour $t \geq y$:

$$\begin{aligned}f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t) &= \lambda e^{\lambda(y-t)} \lambda e^{-\lambda t}\\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t}\end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned}\int_y^M f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_y^M e^{-2\lambda t} dt\\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{-2\lambda}\left[e^{-2\lambda M} - e^{-2\lambda y}\right]\\ &\to \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} \text{ quand } \to +\infty\end{aligned}$$

   Donc, pour $y \geq 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}$

Pour $y < 0$: $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geq y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$

donc $f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t) \begin{cases} \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|} \end{aligned}$$

et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } y\text{, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt \text{ est convergente et vaut } \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}}$

d) Soit $f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}$ pour tout y réel.
f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|} dy &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(par densité de $\varepsilon(1)$) et comme f est paire, $\int_{-\infty}^{0} f(y)\, dy = \frac{1}{2}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy = 1$

Conclusion : $\boxed{y \to \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|} \text{ est une densité de probabilité : celle de } Y}$

e) On détermine la fonction de répartition $F_{|Y|}$:
Pour tout $y < 0$: $\mathrm{P}(|Y| \leq y) = 0$ (événement impossible)
et pour $y \geq 0$: $\mathrm{P}(|Y| \leq y) = \mathrm{P}(-y \leq Y \leq y) = F_Y(y) - F_Y(-y)$ car $-y \leq y$.
Comme Y est à densité, F_Y est continue et C^1sur $\mathbb{R}$ (car f_Y est continue sur $\mathbb{R}$), alors $F_{|Y|}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$
De plus $F_{|Y|}(0) = F_Y(0) - F_Y(0) = 0$ et pour $y < 0$: $F_{|Y|}(y) = 0 \to 0 = F_{|Y|}(0)$ donc $F_{|Y|}$ est continue sur $\mathbb{R}$
Donc $|Y|$ est bien à densité et une densité est

$$f_{|Y|}(y) = F'_{|Y|}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ f_Y(y) + f_Y(-y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |-y|} = \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{|Y| \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)}$

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).
on pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. a) On a $V(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$ et de $[X_1 > k] =$« échec jusqu'au $k^{ième}$ »donc P $[X_1 > k] = q^k$ et $P([X_1 \leq k]) = 1 - q^k$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

   b) $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \dfrac{2}{p}$, $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \dfrac{2q}{p^2}$ par indépendance,

   $E(X_1 - X_2) = 0$, $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = \dfrac{2q}{p^2}$

   c) $(X_1 = X_2) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i \cap X_2 = i)$ et par incompatibilité

   $\mathrm{P}(X_1 = X_2) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = i \cap X_2 = i) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} (q^{i-1}p)^2$ par indépendance.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[X_1 = X_2] &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^{i-1}p\right)^2 \\
&= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} \\
&= \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X_1 = X_2) = \dfrac{p}{1+q}}$

2. a) Pour $i \in \mathbb{N}$: $[\min(X_1, X_2) > i] = [X_1 > i \cap X_2 > i]$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z > i) &= \mathrm{P}(X_1 > i)\,\mathrm{P}(X_2 > i) \text{ par indépendance} \\
&= q^{2i} \text{ (même pour } i = 0 \text{)}
\end{aligned}$$

   Et comme $[Z > i - 1] = [Z \geq i] = [Z = i] \cap [Z > i]$,par incompatibilité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = i) &= \mathrm{P}(Z > i - 1) - \mathrm{P}(Z > i) \\
&= q^{2i-2} - q^{2i} \text{ pour } i - 1 \geq 0 \\
&= q^{2(i-1)}\left(1 - q^2\right) \text{ pour } i \geq 1
\end{aligned}$$

   Et comme $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ on a bien

   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^2) \text{ d'où } E(Z) = \dfrac{1}{1-q^2} = \dfrac{1}{p(1+q)} \text{ et } V(Z) = \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2} \\ \text{d'où } E(T) = E(X_1 + X_2 - Z) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p(1+q)} = \dfrac{1+2q}{p(1+q)} \end{array}}$

   b) $[Z = k] \cup [T = k]$ signifie que le plus petit ou le plus grand de X_1 et de X_2 est égal à k. Comme l'un est le plus petit et l'autre le plus grand, cela signifie que l'un ou l'autre est égal à k.

   Conclusion : $\boxed{[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k].}$
   et comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = k \cup T = k) &= \mathrm{P}(Z = k) + \mathrm{P}(T = k) - \mathrm{P}(T = k \cap Z = k) \\
&= \mathrm{P}(Z = k) + \mathrm{P}(T = k) - \mathrm{P}(X_1 = k \cap X_2 = k)
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_1 = k \cup X_2 = k\right) &= \mathrm{P}\left(X_1 = k\right) + \mathrm{P}\left(X_2 = k\right) - \mathrm{P}\left(X_1 = k \cap X_2 = k\right) \\
&= 2\mathrm{P}\left(X_1 = k\right) - \mathrm{P}\left(X_1 = k \cap X_2 = k\right)
\end{aligned}$$

car X_1 et X_2 on la même loi,

Conclusion : $\boxed{P\left(T = k\right) = 2P\left(X_1 = k\right) - P\left(Z = k\right)}$

c) On a alors, $E\left(T^2\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(2P\left(X_1 = k\right) - P\left(Z = k\right)\right)$ si la série converge.
Or $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P\left(X_1 = k\right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P\left(Z = k\right)$ convergent car X_1 et Z ont une variance, alors

$$\begin{aligned}
E\left(T^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 2P\left(X_1 = k\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P\left(Z = k\right) \\
&= 2E\left(X_1^2\right) - E\left(Z^2\right) \\
&= 2\left[V\left(X_1\right) + E\left(X_1\right)^2\right] - \left[V\left(Z\right) + E\left(Z\right)^2\right] \\
&= 2\left[\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right] - \left[\frac{q^2}{\left(1 - q^2\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - q^2\right)^2}\right] \\
&= 2\frac{q + 1}{p^2} - \frac{q^2 + 1}{p^2\left(1 + q\right)^2} \\
&= \frac{2\left(1 + q\right)^2\left(q + 1\right) - q^2 - 1}{p^2\left(1 + q\right)^2} \\
&= \frac{2q^3 + 5q^2 + 6q + 1}{p^2\left(1 + q\right)^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
V\left(T\right) &= E\left(T^2\right) - E\left(T\right)^2 \\
&= \frac{2q^3 + 5q^2 + 6q + 1}{p^2\left(1 + q\right)^2} - \left(\frac{1 + 2q}{p\left(1 + q\right)}\right)^2 \\
&= \frac{2q^3 + 5q^2 + 6q + 1 - 1 - 4q - 4q^2}{p^2\left(1 + q\right)^2} \\
&= \frac{2q^3 + q^2 + 2q}{p^2\left(1 + q\right)^2} \\
&= \frac{q\left(2q^2 + q + 2\right)}{\left(1 - q^2\right)^2}
\end{aligned}$$

3. a) $\max\left(X_1, X_2\right) \geq \min\left(X_1, X_2\right)$ donc $T - Z \geq 0$ et toutes les valeurs entières sont possibles.
Conclusion : $\boxed{\left(T - Z\right)\left(\Omega\right) = \mathbb{N}}$
On a $[Z = j] \cap [Z = T] = [X_1 = j] \cap [X_2 = j]$ et pour tout j de $\mathbb{N}^*$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(Z = j \cap Z = T\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = j\right)\mathrm{P}\left(X_2 = j\right) = q^{2j-2}p^2 \text{ (par indépendance)}}$

b) Si (j, ℓ) de $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ alors $\ell > 0$ et $[Z = j] \cap [T - Z = \ell] = [Z = j] \cap [T = \ell + j]$ avec $\ell + j \neq j$ donc

$$[Z = j] \cap [T = \ell + j] = \left(X_1 = j \cap X_2 = \ell + j\right) \cup \left(X_2 = j \cap X_1 = \ell + j\right)$$

et par $\cup$ d'incompatible et $\cap$ d'indépendants,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z=j\cap T-Z=\ell) &= \mathrm{P}(X_1=j)\,\mathrm{P}(X_2=\ell+j)+\mathrm{P}(X_2=j)\,\mathrm{P}(X_1=\ell+j)\\ &= 2q^{j-1}pq^{\ell+j-1}=2p^2q^{2j+\ell-2}\end{aligned}$$

c) Si $k=0$ alors

$$\begin{aligned}(X_1-X_2=0) &= \bigcup_{i=1}^{+\infty}(X_1=i\cap X_2=i) \text{ donc}\\ \mathrm{P}(X_1-X_2=0) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X_1=i)\,\mathrm{P}(X_2=i)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}q^{2(i-1)}p^2 \text{ avec } j=i-1\\ &= p^2\sum_{j=0}^{+\infty}q^{2j} \text{ et } |q|<1\\ &= p^2\frac{1}{1-q^2}=\frac{pq^{|0|}}{1+q}\end{aligned}$$

Si $k>0$ alors

$$\begin{aligned}(X_1-X_2=k) &= (X_1=X_2+k)\\ &= \bigcup_{i=1}^{+\infty}(X_1=i+k\cap X_2=i) \text{ donc}\\ \mathrm{P}(X_1-X_2=k) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X_1=i+k)\,\mathrm{P}(X_2=i) \text{ avec } i+k\geq 1\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}q^{i+k-1}pq^{i-1}p\\ &= q^kp^2\sum_{i=1}^{+\infty}q^{2(i-1)} \text{ avec } j=i-1\\ &= q^kp^2\frac{1}{1-q^2}=\frac{q^kp}{1+q}=\frac{pq^{|k|}}{1+q}\end{aligned}$$

et si $k<0$:

$$\begin{aligned}(X_1-X_2=k) &= (X_2=X_1-k)\\ &= \bigcup_{i=1}^{+\infty}(X_1=i-k\cap X_2=i) \text{ donc}\\ \mathrm{P}(X_1-X_2=k) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X_1=i-k)\,\mathrm{P}(X_2=i) \text{ avec } i-k\geq 1\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}q^{i-k-1}pq^{i-1}p\\ &= \frac{q^{-k}p}{1+q}=\frac{pq^{|k|}}{1+q}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{Z} : P([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}}$

d) On a $|X_1 - X_2|(\Omega) = \mathbb{N}$

$(|X_1 - X_2| = 0) = (X_1 - X_2 = 0)$ donc $\mathrm{P}(|X_1 - X_2| = 0) = \dfrac{p}{1+q}$

et pour $k > 0$: $(|X_1 - X_2| = k) = (X_1 - X_2 = k) \cup (X_1 - X_2 = -k)$ incompatibles et

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{P}(|X_1 - X_2| = k) = 2\dfrac{pq^k}{1+q} \text{ si } k > 0 \\ \mathrm{P}(|X_1 - X_2| = 0) = \dfrac{p}{1+q} \end{array}}$

e) On a vu que $T - Z = |X_1 - X_2|$

Pour tout $(j, \ell) \in [\mathbb{N}^*]^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = j \cap T - Z = \ell) &= 2p^2q^{2j+\ell-2} \text{ et d'autre part} \\
\mathrm{P}(Z = j)\,\mathrm{P}(T - Z = \ell) &= \mathrm{P}(Z = j)\,\mathrm{P}(|X_1 - X_2| = \ell) \\
&= q^{2(j-1)}\left(1 - q^2\right) 2\frac{pq^\ell}{1+q} \\
&= 2q^{2j}q^{-2}(1+q)(1-q)\frac{pq^\ell}{1+q} \\
&= \mathrm{P}(Z = j \cap T - Z = \ell)
\end{aligned}$$

et pour $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = j \cap T - Z = 0) &= q^{2j-2}p^2 \text{ et d'autre part} \\
\mathrm{P}(Z = j)\,\mathrm{P}(T - Z = 0) &= \mathrm{P}(Z = j)\,\mathrm{P}(|X_1 - X_2| = 0) \\
&= q^{2(j-1)}\left(1 - q^2\right)\frac{p}{1+q} \\
&= \mathrm{P}(Z = j \cap T - Z = 0)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Z \text{ et } T - Z \text{ sont indépendantes.}}$

4. a) Comme Z et $T - Z$ sont indépendantes, leur covariance est nulle.

Et comme $\operatorname{cov}(Z, T - Z) = \operatorname{cov}(Z, T) - \operatorname{cov}(Z, Z) = \operatorname{cov}(Z, T) + V(Z)$ alors

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{cov}(Z, T) = -V(Z) \neq 0 \\ \text{et } T \text{ et } Z \text{ ne sont pas indépendantes.} \end{array}}$

On pouvait le dire plus rapidement en remarquant que $T \geq Z$ donc, par exemple $(T = 1 \cap Z = 2) = \emptyset$ alors que $\mathrm{P}(T = 1)\,\mathrm{P}(Z = 2) \neq 0$

b) On a

$$\begin{aligned}
\rho = \frac{\operatorname{cov}(Z, T)}{\sqrt{V(T)\,V(Z)}} &= -\sqrt{\frac{V(Z)}{V(T)}} \\
&= -\sqrt{\frac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}}} = -\sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}}
\end{aligned}$$

c) Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^*$

– Si $i > j$ alors $(Z = i \cap T = j) = \emptyset$ donc $\mathrm{P}(Z = i \cap T = j) = 0$

– Si $i = j$ alors $(Z = i \cap T = i) = (X_1 = i \cap X_2 = i)$ et $\mathrm{P}(Z = i \cap T = i) = q^{2i-2}p^2$
– Si $i < j$ alors $(Z = i \cap T = j) = (X_1 = i \cap X_2 = j) \cup (X_1 = j \cap X_2 = i)$ (incompatibilité, puis indépendance)
  $\mathrm{P}(Z = i \cap T = j) = 2q^{i+j-2}p^2$

d) $\mathrm{P}_{Z=j}(T = k) = 0$ si $j > k$ car $Z > T$ est impossible.
Si $j = k$ alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{Z=j}(T = j) &= \frac{\mathrm{P}(Z = j \cap T = j)}{\mathrm{P}(Z = j)} \\
&= \frac{q^{2(j-1)}p^2}{q^{2(j-1)}(1-q^2)} \\
&= \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

Si $j < k$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{Z=j}(T = k) &= \frac{\mathrm{P}(Z = j \cap T = k)}{\mathrm{P}(Z = j)} \\
&= \frac{2q^{2(j+k-2)}p^2}{q^{2(j-1)}(1-q^2)} \\
&= \frac{2q^{2k}p}{1+q}
\end{aligned}$$

On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

On a donc $\mathrm{P}(D_j = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < j \\ \frac{p}{1+q} & \text{si } k = j \\ \frac{2q^{2k}p}{1+q} & \text{si } k > j \end{cases}$

et donc (sous réserve de convergence)

$$\begin{aligned}
E(D_j) &= \sum_{k=j}^{+\infty} k\mathrm{P}(D_j = k) \\
&= j\frac{p}{1+q} + \sum_{k=j}^{+\infty} k\frac{2q^{2k}p}{1+q} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\sum_{k=j}^{+\infty} kq^{2(k-j)} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\sum_{k=0}^{+\infty} (h+j)\,q^{2h} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\left[\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{1}{1-q^2}\right] \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\frac{1}{(1-q^2)^2}
\end{aligned}$$

Qui converge bien, donc D_j a une espérance et

Conclusion : $\boxed{E(D_j) = j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\frac{1}{(1-q^2)^2}}$.

Partie III. Convergences

Dans les questions 1 à 4, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.
pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un $n$échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

1. On a $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n/\lambda$, et $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n/\lambda^2$ par indépendance.
   $E(J_n) = \lambda E(S_n) = n$ et $V(J_n) = \lambda^2 V(S_n) = n$
2. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

   a) Soit $n \geq 3$. Sous réserve d'absolue convergence (ssi convergence simple car tout est positif),

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{J_n}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x^{n-2}}{(n-1)!} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} I_{n-2} \text{ converge car } n-2 \in \mathbb{N} \\ &= \frac{(n-2)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

   Et de même

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x^{n-3}}{(n-1)!} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} I_{n-3} \text{ converge car } n-3 \in \mathbb{N} \\ &= \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} E\left(\frac{1}{J_n}\right) \text{ et } E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) \text{ existent et} \\ E\left(\frac{1}{J_n}\right) = \frac{1}{n-1} \text{ et } E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) = \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \end{array}}$

   b) $\widehat{\lambda_n}$ est une fonction du n échantillon. Donc c'est un estimateur de λ.
   $\widehat{\lambda_n} = \lambda \dfrac{n}{\lambda S_n} = \lambda n \dfrac{1}{J_n}$ donc $E\left(\widehat{\lambda_n}\right) = \lambda n E\left(\dfrac{1}{J_n}\right) = \lambda n \dfrac{1}{n-1} \neq \lambda$
   Donc le biais est $b = E\left(\widehat{\lambda_n}\right) - \lambda = \dfrac{\lambda}{n-1}$
   Conclusion : $\boxed{\widehat{\lambda_n} \text{ est biaisé.}}$

$V\left(\widehat{\lambda_n}\right) = V\left(\lambda n \frac{1}{J_n}\right) = \lambda^2 n^2 V\left(\frac{1}{J_n}\right)$
avec

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{1}{J_n}\right) &= E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) - E\left(\frac{1}{J_n}\right)^2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\
&= \frac{1}{(n-1)^2(n-2)} \\
V\left(\widehat{\lambda_n}\right) &= \frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2(n-2)}
\end{aligned}$$

Donc le risque quadratique est

$$\begin{aligned}
r &= V\left(\widehat{\lambda_n}\right) + b^2 \\
&= \frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{\lambda^2(n^2+n-2)}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\lambda^2(n-1)(n+2)}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{\lambda^2(n+2)}{(n-1)(n-2)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{le risque quadratique } \widehat{\lambda_n} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

3. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

   a) Etant donné une suite de variables aléatoires (X_n) indépendantes, de même loi et de variance non nulle, alors la somme centrée réduite des n premiers converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
   C'est à dire que la fonction de répartition de la somme centrée réduite tends vers Φ.
   $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ a pour espérance n/λ et pour variance n/λ^2.
   Les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et ont une variance non nulle. Donc la centrée réduite $\dfrac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = N_n$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

   b) Donc, pour n assez grand, $\mathrm{P}(-u_\alpha \le N_n \le u_\alpha) \simeq \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha)$ car $-u_\alpha \le u_\alpha$ et comme $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$.
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(-u_\alpha \le N_n \le u_\alpha) \simeq 1-\alpha}$

   c) On résout : $\lambda \in \left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]$
   $\iff \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{n}{S_n} \le \lambda \le \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{n}{S_n}$
   $\iff \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{n}{\lambda} \le S_n \le \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{n}{\lambda}$
   $\iff -\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\dfrac{n}{\lambda} \le S_n - \dfrac{n}{\lambda} \le \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\dfrac{n}{\lambda}$
   $\iff -u_\alpha \le N_n \le u_\alpha$
   Donc $\mathrm{P}\left(\lambda \in \left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) = \mathrm{P}(-u_\alpha \le N_n \le u_\alpha) \simeq 1-\alpha$

Conclusion : $\boxed{\left[\left(1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n},\left(1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } \lambda \text{ au niveau de risque } \alpha \text{ quand } n \text{ est grand.}}$

On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda_n}$ sur le n-échantillon.

4. Avec le n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.

   a) Comme la densité φest continue sur $\mathbb{R}$, Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   Et comme $\Phi' = \varphi > 0$ alors Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Elle et donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{-\infty}\Phi; \lim_{+\infty}\Phi[=]0,1[$

   Conclusion : $\boxed{\Phi \text{ a une réciproque } \Phi^{-1} \text{ qui est définie sur }]0,1[}$

   b) L'intervalle de confiance précédent est $\left[\widehat{\lambda_n} - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\ ,\ \widehat{\lambda_n} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right]$ centré sur $\widehat{\lambda_n}$ et de rayon $\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}$.
   Celui de longueur k fois plus petite est $\left[\widehat{\lambda_n} - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\ ,\ \widehat{\lambda_n} + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right]$
   et comme précédemment,
   $\lambda \in \left[\widehat{\lambda_n} - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\ ,\ \widehat{\lambda_n} + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right]$
   $\iff -u_\alpha/k \leq N_n \leq u_\alpha/k$
   Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\lambda \in \left[\widehat{\lambda_n} - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\ ,\ \widehat{\lambda_n} + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right]\right) &= \Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - \Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right)\\ &= 2\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1\end{aligned}$$

   On a $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ donc $u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ qui ne simplifie pas l'écriture
   d'où, astuce : $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ et $-u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2)$ soit $u_\alpha = -\Phi^{-1}(\alpha/2)$ d'où

$$\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) = \Phi\left(-\frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{k}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{k}\right)$$

   et la probabilité :

$$\mathrm{P}(\lambda \in [\cdots]) = 1 - 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$$

   Conclusion : $\boxed{\left[\widehat{\lambda_n} - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\ ,\ \widehat{\lambda_n} + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\widehat{\lambda_n}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } \lambda \text{ au niveau de risque } \beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)}$

   On remarque que $\alpha = 2\Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$ et on résout :
   $\beta > \alpha \iff \Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right) > \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$
   $\iff \frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2) > \Phi^{-1}(\alpha/2)$ et comme $\frac{1}{k} > 1$ et que $\Phi^{-1}(\alpha/2) \geq 0$, cette inégalité est bien vérifiée.

   Conclusion : $\boxed{\beta > \alpha \text{ ce qui était prévisible : La probabilité d'être dan un intervalle plus étroit est plus petite !}}$

Dans les questions 5 à 7, on suppose que $\lambda = 1$.

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose : $g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$ et $h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$

a) $h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$
On l'intègre par parties pour faire apparaître $\int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$:
Soit $u'(t) = f_{T_n}(t)$: $u(t) = F_{T_n}(t)$ et $v(t) = t$: $v'(t) = 1$
v est C^1 et u est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ car la densité f_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Donc
$$\begin{aligned}\int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt &= [tF_{T_n}(t)]_0^x - \int_0^x F_{T_n}(t)\,dt \\ &= xF_{T_n}(x) - g_n(x)\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{h_n(x) = xF_{T_n}(x) - g_n(x)}$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $(T_n \leq t) = \max(X_1, X_2, ..., X_n) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq t)$ indépendants donc
$F_{T_n}(t) = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(X_i \leq t) = [F_X(t)]^n$
$\mathrm{P}\max(X_1, X_2, ..., X_n) \int_{-\infty}^t f_{T_n}(x)\,dx = 0$ si $t \leq 0$
et si $t \geq 0$: $\int_{-\infty}^t f_{T_n}(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t}$
Conclusion : $\boxed{F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$
Soit $n \geq 2$ (pour avoir $n - 1 \in \mathbb{N}^*$)
$$\begin{aligned}g_{n-1}(x) - g_n(x) &= \int_0^x \left(F_{T_{n-1}}(t) - F_{T_n}(t)\right) dt \\ &= \int_0^x \left(\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} - \left(1 - e^{-t}\right)^n\right) dt \\ &= \int_0^x \left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} e^{-t}dt \text{ à la volée :} \\ &= \left[\frac{1}{n}\left(1 - e^{-t}\right)^n\right]_0^x \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - e^{-x}\right)^n - 0\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\text{Pour } n \geq 2 : g_{n-1}(x) - g_n(x) = \tfrac{1}{n}F_{T_n}(x)}$

c) On a donc pour $n \geq 2$: $g_n(x) = g_{n-1}(x) - \frac{1}{n}F_{T_n}(x)$ et par récurrence :
$$g_n(x) = -\frac{1}{n}F_{T_n}(x) - \frac{1}{n-1}F_{T_{n-1}}(x) \cdots - \frac{1}{2}F_{T_2}(x) + g_1(x)$$
et comme
$$\begin{aligned}g_1(x) &= \int_0^x F_{T_1}(t)\,dt = \int_0^x 1 - e^{-t}dt = \left[t + e^{-t}\right]_0^x \\ &= x + e^{-x} - 1 \\ &= x - \frac{1}{1}F_{T_1}(x)\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{g_n(x) = x - \frac{1}{n}F_{T_n}(x) - \frac{1}{n-1}F_{T_{n-1}}(x) \cdots - \frac{1}{2}F_{T_2}(x) - \frac{1}{1}F_{T_1}(x)}$

d) Pour $x \geq 0$: $F_{T_n}(x) - 1 = (1 - e^{-x})^n - 1$
Comme $-e^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et que $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ quand $x \to 0$ alors $(\alpha = n)$
Conclusion : $\boxed{F_{T_n}(x) - 1 \sim -ne^{-x} \text{ quand } x \to +\infty}$

e) T_n a une espérance si $\int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt = xF_{T_n}(x) - g_n(x)$ a une limite finie quand $x \to +\infty$
Astuce : On réécrit $xF_{T_n}(x) - g_n(x) = x(F_{T_n}(x) - 1) + x - g_n(x)$ pour faire apparaître la quantité dont on a un équivalent.
Or $x(F_{T_n}(x) - 1) \sim -nxe^{-x} \to 0$ car $x = o(e^x)$ quand $x \to +\infty$ donc $x(F_{T_n}(x) - 1) \to 0$.
D'autre part, toute fonction de répartition tend vers 1 en $+\infty$ donc

$$\begin{aligned} x - g_n(x) &= \frac{1}{n}F_{T_n}(x) + \frac{1}{n-1}F_{T_{n-1}}(x) \cdots + \frac{1}{2}F_{T_2}(x) + \frac{1}{1}F_{T_1}(x) \\ &\to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ quand } x \to +\infty \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{T_n \text{ a une espérance et } E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

6. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - E(T_n)$.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

a) Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} F_{G_n}(x) &= \mathrm{P}(G_n \leq x) = \mathrm{P}(T_n \leq x + E(T_n)) \\ &= F_{T_n}(x + E(T_n)) \end{aligned}$$

avec $x + E(T_n) = x + \gamma_n + \ln(n)$
Et comme $E(T_n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, pour n suffisamment grand on aura $E(T_n) - x \geq 0$ et donc $F_{T_n}(\cdots) = (1 - e^{-\cdots})^n$

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x + E(T_n)) &= \left(1 - e^{-(x+\gamma_n+\ln(n))}\right)^n \\ &= \left(1 - e^{-\ln(n)}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout } x \text{ réel et } n \text{ assez grand, on a :} \\ F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n.\end{array}}$

b) On a une forme indéterminée 1^∞ qu'il faut résoudre :

$$\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)\right]$$

Comme $e^{-(x+\gamma_n)} \to e^{-(x+\gamma)}$ et que $-\frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)} \to 0$ alors

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right) &\sim -\frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)} \text{ et} \\ \left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)\right] &\sim -e^{-(x+\gamma_n)} \to -e^{-(x+\gamma)} \text{ donc} \\ \left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n &\to \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \end{aligned}$$

Et comme $n \to +\infty$, il sera "suffisamment grand" et

Conclusion : $\boxed{F_{G_n}(x) \to \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \text{ quand } n \to +\infty}$

c) Pour tout x réel, $F_G(x) = \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right]$

F_G est continue et C^1 sur $\mathbb{R}$

En $-\infty$: $-e^{-(x+\gamma)} \to -\infty$ donc $F_G(x) \to 0$

En $-\infty$: $-e^{-(x+\gamma)} \to 0$ et $F_G(x) \to 1$

Enfin , F_G est croissante sur $\mathbb{R}$. (composée de deux fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$ ou par $F'_G(x) = \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \times -e^{-(x+\gamma)} \times -1 > 0$)

Conclusion : $\boxed{\text{$F_G$ est la fonction de répartition d'une variable à densité G et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi de G}}$

7. a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante.

Pour tout x réel, $(Y \leq x) = (F_X(X) \leq x)$

Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ (variable à densité) et qu'elle est strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et admet une réciproque.

- Si $x \leq 0$: $(Y \leq x) = \emptyset$ et $F_Y(x) = 0$
- Si $x \geq 1$: $(Y \leq x) = \Omega$ et $F_Y(x) = 1$
- Si $x \in]0,1[$: $(Y \leq x) = \left(X \leq F_X^{-1}(x)\right)$ donc $F_Y(x) = F_X\left(F_X^{-1}(x)\right) = x$

et on reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}}$

b) La variable aléatoire G a pour fonction de répartition $F_G : x \to \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right]$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $Y = F_G(G) \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$. reste à déterminer G en fonction de Y :

$Y = F_G(G) \iff Y = \exp\left[-e^{-(G+\gamma)}\right]$

$\iff \ln(Y) = -e^{-(G+\gamma)}$ car $Y > 0$

$\iff \ln(-\ln(Y)) = -G - \gamma$ car $-\ln(Y) > 0$ puisque $Y < 1$

$\iff G = -\gamma - \ln(-\ln(Y))$

d'où la simulation :

```
function Gumbel(x :real) :real;
var Y :real;
begin
    Y :=random;
    Gumbel :=-gamma-ln(-ln(Y));
end;
```

N.B. il faudra initialiser par `randomize` avant d'utiliser cette fonction.