ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°3

À rendre le 7 Novembre

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{et, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

(1) On note $f : x \longmapsto x^2 - x\ln(x)$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
(b) Déterminer les limites de f aux extrémités de son ensemble de définition.
(c) On admet que f est dérivable deux fois sur $]0;+\infty[$. Calculer, pour $x > 0$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
(d) Dresser le tableau de variations de f.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $1/2 \leq u_n \leq 1$.
(3) Montrer que (u_n) est croissante.
(4) Déduire des deux questions précédentes que (u_n) converge vers une limite ℓ avec

$$1/2 \leq \ell \leq 1.$$

(5) Montrer que la fonction $g:\ x \mapsto x - \ln(x) - 1$ est strictement monotone sur $[1/2;1]$ et vérifie $g(1) = 0$ puis en déduire que, $\forall x \in [1/2;1]$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.
(6) Conclure alors quant à la valeur de ℓ.
(7) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche le plus petit entier N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice 2. On note dans tous le problème et pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

L'objet de ce problème et de démontrer que cette suite tend vers e et de programmer le calcul d'une valeur approchée de e. On rappelle que, par convention $0! = 1$.

(1) Montrer que $n! \geq n$. Justifier alors le résultat du cours affirmant que $n! \longrightarrow +\infty$, $n \to +\infty$.
(2) On définit la suite (T_n), pour tout entier $n \geq 1$, par

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} = S_n + \frac{1}{n!}.$$

(a) Montrer que la suite (S_n) est croissante et que la suite (T_n) est décroissante.
(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $S_n \leq T_n$ et en déduire que la suite (S_n) est majorée et la suite (T_n) est minorée.
(c) Montrer que (S_n) et (T_n) convergent vers une même limite ℓ et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq \ell \leq T_n.$$

(d) À quelle condition sur n, S_n donne-t-elle une valeur approchée de ℓ avec une précision ε?

(3) L'objet de cette partie est d'écrire un programme en `SciLab` permettant de calculer une valeur approchée de ℓ avec la précision `epsilon` voulue.

(a) Écrire une fonction `y=depassement(epsilon)` qui renvoie le plus petit entier n tel que $n! \geq 1/$`epsilon`.

(b) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée de e à `epsilon` près.

```
function y=valeur_approchee(epsilon)
    y=........................
    f=1;
    for k=2:...................
        f=f*k;
        y=....................
    end
endfunction
```

(c) Afficher `valeur_approchee(`10^{-k}`)` pour k allant de 1 à 6. Qu'observe-t-on?

(4) On se propose de démontrer à présent que $\ell = e$. On pose pour tout entier n :

$$f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad g_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - (e-1)\frac{x^n}{n!} = f_n(x) - (e-1)\frac{x^n}{n!}.$$

(a) Montrer que pour tout entier n, $\quad f'_{n+1}(x) = f_n(x)$, et en déduire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f_n(x) \geq 0$.

(b) Montrer de même que pour tout entier n et tout $x \in [0,1]$, $\quad g_n(x) \leq 0$, et donc que

$$f_n(x) \leq (e-1)\frac{x^n}{n!}.$$

(c) En considérant une valeur de x particulière, déduisez-en que pour tout entier n :

$$0 \leq e - S_n \leq \frac{e-1}{n!}.$$

(d) En déduire que la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.