ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°9

À rendre au plus tard le 14 Mars

Exercice 1. On considère, dans $\mathbb{R}^4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

(1) Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille liée. En déduire une base de F et sa dimension. De donner l'équation (ou le système d'équations) caractérisant F.

(2) Donner une base du sous-espace G suivant

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ 3x - y + 2t = 0 \right\}.$$

Exercice 2. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\{2u_1, u_1 - u_2, u_1 - u_2 + 2u_3\}$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser les coordonnées des vecteurs de l'ancienne base dans la nouvelle.

Exercice 3. (Super Mario) Un jeu vidéo à base de plombier et de champignons comporte N niveaux. Chaque niveau est de plus en plus difficile, la probabilité, à chaque tentative, de terminer l niveau k est de $1/(k+1)$.

Une fois qu'un niveau est réussi, on n'a plus besoin de le refaire et chaque nouvelle tentative part du niveau suivant. Une personne s'achète le jeu et décide de n'y consacrer qu'une seule partie par jour. Chaque nouvelle partie est indépendantes des autres.

On introduit, pour $k \in [\![1; N]\!]$ et $n \geq 1$ les évènements A_n^k "on réussit le niveau k le $n-$ième jour" et S_n^k "la première réussite du niveau k se produit le $n-$ième jour" et S "on finit par terminer le jeu".

(1) *Cas* $N = 2$.

(a) Exprimer S_n^1 à l'aide des évènement A_j^1. En déduire, pour tout $n \geq 1$, $P(S_n^1)$.

(b) Décrire l'évènement $S_3^1 \cap S_7^2$ puis calculer sa probabilité.

(c) Plus généralement, calculer, pour tous entiers $i \geq 1$ et $j \geq 2$ (en distinguant les cas $j \leq i$ et $j > i$) la probabilité
$$P(S_i^1 \cap S_j^2).$$

(d) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier $j \geq 2$
$$P(S_j^2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.$$

(e) Exprimer S à l'aide des évènements S_n^2. En déduire qu'on finit presque sûrement le jeu.

(2) *Cas* $N = 3$. *Attention, calculs très lourds.*

(a) Montrer que, pour tous entiers $j \geq 2$ et $k > j$, on a
$$P(S_j^2 \cap S_k^3) = \frac{1}{4} P(S_j^2) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-j-1}.$$

(b) En s'inspirant de la partie précédente, en déduire que
$$P(S) = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{+\infty} \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-j-1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\right]$$

(c) Conclure.