ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°9

Solution

Exercice 1. On considère, dans $\mathbb{R}^4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

(1) On peut bien sûr montrer que la famille n'est pas libre (en vérifiant que le système $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ mène à des solutions autres que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$) ou bien voir que, par exemple,

$$v_1 = 4v_2 - 2v_3.$$

Ainsi, on peut simplifier

$$F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_2, v_3\}.$$

Comme, de plus, v_2 et v_3 sont clairement non colinéaires, ils forment du base de F qui est donc de dimension 2. Pour trouver l'équation caractérisant F, il faut trouver les conditions sur les composantes x, y, z et t d'un vecteur u pour que celui-ci soit dans F, c'est à dire pour qu'il puisse d'écrire comme combinaison linéaire de v_2 et v_3. Ainsi,

$$\begin{aligned}
u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \quad & \iff \quad \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad u = av_2 + bv_3 \\
& \iff \quad \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2a + 5b & = & x \\ -a - 2b & = & y \\ 3a + 8b & = & z \\ -b & = & t \end{array} \right. . \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -2x - 5y \\ b & = & x + 2y \\ 2x + y & = & z \\ -x - 2y & = & t \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux premières lignes donnent les valeurs de a et b qui conviennent et les deux dernières donnent le système d'équations que doivent vérifier les composantes de u pour que le système soit compatible. Ainsi,

$$F=\left\{u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4:\quad 2x+y-z=0 \text{ et } x+2y+t=0\right\}.$$

(2) On raisonne par équivalences

$$u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in G \iff u=\begin{pmatrix}x\\3x+2t\\z\\t\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\implies u\in \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Il est facile de voir (en résolvant le système) que les trois vecteurs ci-dessus forment une famille libre. Comme ils engendrent G, il en forment donc une base. En particulier, on a $\dim G=3$.

Exercice 2. Soit $\{u_1,u_2,u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que $\{2u_1,u_1-u_2,u_1-u_2+2u_3\}$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$, on prend $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ trois réels vérifiant

$$\lambda_1\times 2u_1+\lambda_2\times(u_1-u_2)+\lambda_3\times(u_1-u_2+2u_3)=0$$

et on montre que la seule solution est $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1\times 2u_1+\lambda_2\times(u_1-u_2)+\lambda_3\times(u_1-u_2+2u_3) &= 0\\ &\iff (2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)u_1+(-\lambda_2-\lambda_3)u_2+2\lambda_3u_3=0\end{aligned}$$

Or, comme on sait que $\{u_1,u_2,u_3\}$ est une base, c'est en particulier une famille libre et la seule liaison possible est celle dont tous les coefficients sont nuls. La dernière égalité est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl}2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=&0\\-\lambda_2-\lambda_3&=&0\\2\lambda_3&=&0\end{array}\right.\iff \lambda_3=\lambda_2=\lambda_1=0$$

et on a bien la solution attendue. La famille des trois vecteurs est libre. Or, trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ en forment toujours une base et on a bien ce qu'on demandait. Les coordonnées des vecteurs de départ dans la nouvelle base sont les coefficients de décomposition en combinaison linéaire des anciens vecteurs en fonction des nouveau. On voit (soit en résolvant le système soit "à la main") que

$$\begin{aligned}u_1&=\frac{1}{2}\times 2u_1+0\times(u_1-u_2)+0\times(u_1-u_2+2u_3)\\ u_2&=-\frac{1}{2}\times 2u_1-1\times(u_1-u_2)+0\times(u_1-u_2+2u_3)\\ u_3&=0\times u_1-\frac{1}{2}\times(u_1-u_2)+\frac{1}{2}\times(u_1-u_2+2u_3)\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées respectives de u_1,u_2 et u_3 dans la base $\{2u_1,u_1-u_2,u_1-u_2+2u_3\}$ sont $(1/2;0;0)$, $(-1/2;-1;0)$ et $(0;-1/2;1/2)$.

Exercice 3. (Super Mario) Un jeu vidéo à base de plombier et de champignons comporte N niveaux. Chaque niveau est de plus en plus difficile, la probabilité, à chaque tentative, de terminer l niveau k est de $1/(k+1)$.

Une fois qu'un niveau est réussi, on n'a plus besoin de le refaire et chaque nouvelle tentative part du niveau suivant. Une personne s'achète le jeu et décide de n'y consacrer qu'une seule partie par jour. Chaque nouvelle partie est indépendantes des autres.

On introduit, pour $k \in [\![1; N]\!]$ et $n \geq 1$ les évènements A_n^k "on réussit le niveau k le $n-$ième jour" et S_n^k "la première réussite du niveau k se produit le $n-$ième jour" et S "on finit par terminer le jeu".

(1) *Cas* $N = 2$.

(a) L'évènement S_n^1 correspond à finir le premier niveau en n tentatives, c'est à dire que les $n-1$ premiers essais ont été vains. On peut alors écrire

$$S_n^1 = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A}_i^1 \right) \cap A_n^1.$$

Comme, pour le premier niveau, la probabilité de réussite (et donc de défaite) est égale à $1/2$ et que les tentatives sont indépendantes, la probabilité de l'intersection précédente s'obtient comme produit des probabilités des évènements correspondants, soit

$$P(S_n^1) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} P(\overline{A}_i^1) \right) P(A_n^1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) L'évènement $S_3^1 \cap S_7^2$ signifie qu'on a réussit le premier niveau pour la première fois à la troisième tentative et qu'on a ensuite échoué trois fois au second niveau (ce qui se passe avec probabilité $2/3$) et enfin réussit le second niveau le $7-$ème jour (avec probabilité $1/3$). Encore une fois, les parties étant indépendantes, on a

$$P(S_3^1 \cap S_7^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{2^3}{2^3 \times 3^4} = \frac{1}{81}.$$

(c) Si $j \leq i$, on ne peut pas finir le niveau 2 avant le niveau 1 et la probabilité est nulle

$$P(S_i^1 \cap S_j^2) = 0, \qquad j \leq i.$$

Si par contre, $i \leq j-1$, alors on a fini le premier niveau le $i-$ème jour (et on connait la probabilité d'après une question précédente que cela se produise) puis il se passe $j-1-i$ jours pendant lesquels on essaie sans succès de venir à bout du niveau 2 avant de réussir le jour j. Il suit que

$$P(S_i^1 \cap S_j^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1} \times \frac{1}{3}.$$

(d) Comme

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} S_i^1 \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1,$$

on finit presque sûrement par finir le niveau 1 et on peut appliquer la formule des probabilités totales à l'ensemble d'évènements deux à deux incompatibles $\{S_i^n : n \in$

$\mathbb{N}^*\}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
P(S_n^2) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(S_i^1 \cap S_j^2) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1} \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \times \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^{i-1} \\
&= \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \times \left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}}{1-\frac{3}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}
\end{aligned}$$

(e) Il est alors clair que pour finir le jeu, il faut, à un moment, finir le niveau 2. Donc

$$S = \bigcup_{j=2}^{+\infty} S_j^2.$$

Comme les évènements sont incompatibles deux à deux, on a

$$\begin{aligned}
P(S) &= \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \\
&= \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 1 \\
&= 3 - 1 - 2 + 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

et on finit bien le jeu (composé de deux niveaux) presque sûrement.

(2) *Cas* $N = 3$. *Attention, calculs très lourds.*

(a) Soient deux entiers $j \geq 2$ et $k > j$. Par la formule des probabilités composées, on a

$$P(S_j^3 \cap S_k^3) = P(S_j^2) P_{S_j^2}(S_k^3).$$

Or, sachant qu'on a finit le niveau 2 en j jours, la probabilité de terminer le niveau 3 en k jours est celle d'échouer aux $k-1-j$ premières tentatives (avec probabilité $3/4$) puis de réussir à la $k-$ème (avec probabilité $1/4$). On a donc bien

$$P(S_j^2 \cap S_k^3) = \frac{1}{4} P(S_j^2) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-j-1}.$$

(b) On reprend alors tous les arguments de la partie précédente; S correspond à l'union disjointe des S_k^3 ($pour k \geq 3$) et sa probabilité s'obtient comme somme infinie. On obtient également $P(S_k^3)$ à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée à $\{S_j^2 : \ j \geq 2\}$

$$P(S) = \sum_{k=3}^{+\infty} P(S_k^3)$$

et

$$\begin{aligned} P(S_k^3) &= \sum_{j=2}^{+\infty} P(S_j^2 \cap S_k^3) \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} P(S_j^2 \cap S_k^3) \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \right] \left(\frac{3}{4}\right)^{k-j-1} \end{aligned}$$

En combinant ces deux sommes, on obtient bien

$$P(S) = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{+\infty} \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-j-1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \right]$$

qu'on calcule (non sans peine).

(c) Le calcul donne alors

$$\begin{aligned} P(S) &= \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \left(\sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{4}{3} \times \frac{2}{3}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\right)^{j-1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \left(\frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}}{1 - \frac{8}{9}} - 1 - \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}{1 - \frac{2}{3}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{+\infty} \left[6 \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} - 8 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[6 \times \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}} - 1 \right) - 8 \times \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 \right) + 2 \times \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} (18 - 16 + 2) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et une fois de plus on termine le jeu presque sûrement.