ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Surveillé n°4

Solution

Exercice 1. (D'après **EML 2001**) On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

(1) Les colonnes de A sont liées : $C_1 + C_2 + C_3 - C_4 = 0$ donc A n'est pas inversible. Par ailleurs, les trois premières colonnes sont libres. En effet,

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 + \lambda_3 C_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Par conséquent, comme elles engendrent l'image de f, elles en forment également une base et on peut en déduire la dimension de celle ci: $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$ et

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(2) (a) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Pour déterminer le noyau, on résout l'équation $f(u) = 0$:

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} x - t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff u = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ engendre le noyau et en forme donc une base. Le noyau de f est donc de dimension 1 (ce qu'on savait déjà par le théorème du rang).

(3) (a) On a vu ci-dessus que $A^4 = 0$. Or, A^4 est la matrice dans la base canonique de $f^4 = f \circ f \circ f \circ f \circ f$. Supposons alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \neq 0$ tels que $f(u) = \lambda u$. En appliquant f quatre fois, on obtient

$$f^4(u) = f^3(f(u)) = f^3(\lambda u) = \lambda f^3(u) = \lambda f^2(f(u)) = \lambda f^2(\lambda u) = ... = \lambda^4 u.$$

Or $f^4 = 0$ donc $f^4(u) = 0$, mais cela donne $\lambda^4 u = 0$. Or $u \neq 0$ donc $\lambda^4 = 0$. La seule solution de cette équation de degré 4 est $\lambda = 0$.

(b) Supposons qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ représentant f dans une base $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Par définition de la matrice d'une application dans une base, cela voudrait dire que $f(u_1) = \lambda_1 u_1, f(u_2) = \lambda_2 u_2$, $f(u_3) = \lambda_3 u_3$ et $f(u_4) = \lambda_4 u_4$. Mais d'après la question précédente, on ne peut alors avoir comme valeur pour chacun des λ_i que 0. Ainsi D est la matrice nulle. Mais la matrice nulle ne peut représenter qu'un endomorphisme nul et f n'est pas nul, donc ce n'est pas possible. *On dit que f n'est pas diagonalisable.*

(4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

(a) Commençons par écrire les composantes des vecteurs ε_i

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_3 = f^2(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_4 = f^3(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer qu'une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ en forme une base, il suffit de montrer qu'ils forment une famille libre.

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 + \lambda_4\varepsilon_4 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

et $\mathcal{C}$ forme bien une base de $\mathbb{R}^4$. On aurait aussi pu raisonner sans les composantes en composant la relation de liaison successivement par f^3 (pour ne garder que λ_4 et montrer qu'il est nul), puis par f^2 (pour faire la même chose sur λ_3), puis par f (pour λ_2). Et enfin on aurait eu seulement λ_1 qui se serait retrouvé nul également.

(b) Par définition des vecteurs de $\mathcal{C}$ et comme $f^4 = 0$, on a

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2,\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3,\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_4,\ f(\varepsilon_4) = 0$$

et la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est alors

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Supposons que ce soit le cas. On aurait alors

$$g \circ f^2 \circ g^{-1} = \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^2 = \left(f^2\right)^2 = f^4 = 0$$

ce qui donnerait,

$$f^2 = g^{-1} \circ 0 \circ g = 0$$

mais ce qui n'est pas le cas. Il n'existe donc pas de tel endomorphisme.

Exercice 2. (D'après **EML 2001**) On considère la fonction $f\ : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) (a) En dehors de 0 (c'est à dire sur $]0; +\infty[$, f est continue comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il faut vérifier, pour la continuité en 0, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = f(0) = 1.$$

Or, on reconnait l'inverse d'une limite usuelle

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

Ainsi, f est bien continue sur $[0; +\infty[$.

(b) Sur $]0; +\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient de deux telles fonctions usuelles sont le dénominateur ne s'annule pas. Les formules de dérivation donnent

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}. \end{aligned}$$

(c) La partie polynominale du DL à l'ordre 1 en 0 est donnée par l'équation de la tangente en 0, on a bien évidemment

$$e^x = 1 + x + o(x).$$

Le reste de ce DL se précise pour obtenir le DL d'ordre 2 dont on a besoin ci après

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

(d) On injecte le DL à l'ordre 2 ci-dessous dans l'expression de la dérivée de f obtenue deux questions plus haut. A noter qu'au dénominateur, qui fait apparaître un carré, on a besoin seulement du DL à l'ordre 1

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2/2+o(x^2))-1}{(x+o(x)-1)^2} \\ &= \frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{-1/2+o(1)}{1+o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

et on trouve bien la limite attendue.

(e) Pour montrer que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, il faut vérifier que f est bien dérivable en 0 (via limite de son taux d'accroissement) et que cette limite est bien égale à celle obtenue pour $f'(x)$, soit $-1/2$. On utilise une fois de plus le DL d'ordre 2. A noter qu'au dénominateur on a seulement besoin du DL à l'ordre 1 car l'expression se trouve multipliée par x.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} \\ &= \frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)} \\ &= \frac{x-1-x-x^2/2+o(x^2)+1}{x(1+x+o(x)-1)} \\ &= \frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{-1/2+o(1)}{1+o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien dérivable en 0, $f'(0) = -1/2$ et f' est continue en 0 donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

(2) (a) Comme précédemment, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux telles fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas.Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-xe^x(1-e^x)^2 - ((1-x)e^x-1)2e^x(1-e^x)}{(1-e^x)^4} \\ &= \frac{-xe^x(e^x-1)-2e^x((1-x)e^x-1)}{(e^x-1)^3} \\ &= \frac{-xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2xe^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3} \\ &= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x-2e^x+x+2). \end{aligned}$$

(b) La fonction g définie par

$$g:\ x \in [0;+\infty[\longmapsto xe^x - 2e^x + x + 2.$$

apparaît au numérateur de $f''(x)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;+\infty[$, et on a

$$g'(x) = (x-1)e^x + 1.$$

Il faut hélas dériver g une fois de plus. On trouve

$$g''(x) = xe^x$$

ce qui permet enfin de dresser le(s) tableau(x) de variations! On observe que $g'(0) = g(0) = 0$.

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
g'	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	

(c) En déduire que

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0.$$

(d) Comme un calcul précédent donne, pour $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3},$$

la dernière ligne du tableau précédent permet de voir que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$. On en déduit les variations de f' puis celles de f. Par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-xe^x}{e^{2x}} = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$+$
f'	$-1/2$ $\nearrow$	0
$f'(x)$		$-$
f	1 $\searrow$	0

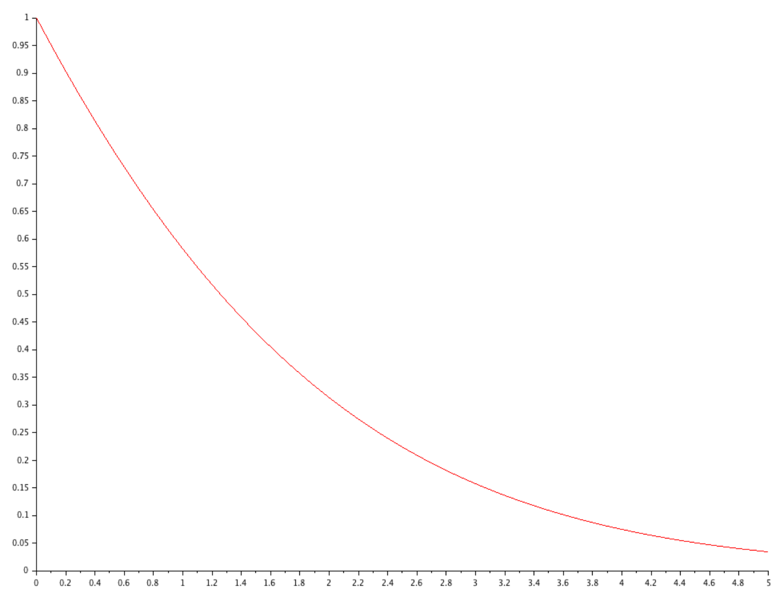
(e) On fait alors un joli dessin. Celui fourni ci-dessous est obtenu avec `SciLab` et on ne resiste pas au plaisir d'en joindre les commandes.

```
--> function y=f(x); if x==0 then; y=1; else; y=x/(exp(x)-1); end; endfunction

--> X=0:.01:5;

--> Y=feval(X, f);

--> plot2d(X,Y, style=5)
```



(3) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Le tableau ci dessus donne toutes les informations demandées, à savoir, pour tout $x \geq 0$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

(b) Soit $x \in]0;+\infty[$ (en particulier $x \neq 0$). Comme $f(0) = 1 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{x}{e^x - 1} = x \\ &\iff \frac{1}{e^x - 1} = 1 \\ &\iff 1 = e^x - 1 \\ &\iff e^x = 2 \\ &\iff x = \ln(2). \end{aligned}$$

(c) Afin d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à f sur $[0;1]$, il faut vérifier que tous les termes de la suite (u_n) sont bien dans l'intervalle. C'est une récurrence immédiate. En effet, $u_0 = 0 \in [0;1]$, et comme $f(x) \in [0;1]$ si $x \geq 0$, en prenant $x = u_n$, on a bien $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1]$ si $u_n \in [0;1]$. Comme f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, que $\ln(2) \in [0;1]$ et que $|f'(x)| \leq 1/2$ si $x \in [0;1]$, l'IAF donne

$$|u_{n+1} - \ln(2)| = |f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|,$$

ce qu'on voulait.

(d) Une récurrence permet alors d'obtenir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$ ($|u_0 - \ln(2)| \leq 1$) et si c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors par la question précédente

$$|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

On en déduit, par le théorème des gendarmes que la suite converge vers $\ln(2)$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln(2).$$

(e) Ce type de programme est ultra-classique et finalement on a même pas besoin de calculer les termes de la suite...

```
N=0;
while (1/2)^N >10^(-5)
    N=N+1
end
disp(N)
```

Une autre version, basée sur la résolution de l'inéquation $(1/2)^N \leq 10^{-5}$, serait

```
N=floor(5*log(10)/log(2)) +1;
disp(N)
```

Exercice 3. (D'après **ECRICOME 2015**)

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention

de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ième tirage".

(1) La boule noire peut arriver dès le premier tirage. Elle peut, au pire, arriver au dernier tirage (le $N-$ième), une fois que les $N-1$ boules blanches ont été consécutivement retirées de l'urne. On a donc $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

(2) On complète ce programme sans difficulté

```
function X=tirage(N)
    X=1;
    while rand()>1/N //tant qu'on a pas la boule noire
        X=X+1; //il faut un tirage de plus
        N=N-1; //il y a une boule (blanche) en moins dans l'urne
    end
endfunction
```

(3) On simule 10000 fois cette expérience aléatoire. Le vecteur `S` a pour composante `S(i)` le nombre de fois, sur les 10000 réalisations, que la fonction `tirage(N)` a renvoyé i.

```
N = input('N=?') ;
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
        i=tirage(N)
        S(i) = S(i)+1 //le nombre de simulations donnant X=i
augmente de 1
end
S=S/10000;
```

(4) Les fréquences d'apparition des valeurs entre 1 et 5 sont sensiblement les mêmes; on peut donc **conjecturer** que X suit une loi uniforme sur $[\![1; 5]\!]$.

(5) La prise de valeur $X = k$ se traduit par des informations précises sur les k premiers tirages. On utilise la formule des probabilités composées pour passer aux probabilités.

$$P(X = 1) = P(N_1) = \frac{1}{N}, \qquad P(X = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P_{B_1}(N_2)P(B_1) = \frac{1}{N-1} \times \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$$

$$P(X = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{N_1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}.$$

(6) On généralise le calcul précédent pour bien vérifier qu'on obtient la formule correspondant à la loi uniforme pour $k \in [\![3; N]\!]$. Toujours avec la formule des probabilités composées

$$P(X = k) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} B_j \cap N_k\right) = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{N-j}{N+1-j} \times \frac{1}{N-(k-1)} = \frac{1}{N}$$

et on a bien montré que

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; N]\!]).$$

(7) Le nombre cherché est l'espérance de X. D'après le cours,

$$E(X) = \frac{N+1}{2}.$$

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.

On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement "on choisit l'urne U_1".
- C_2 l'événement "on choisit l'urne U_2".

(1) Sachant qu'on tire dans l'urne U_1, on sera en mesure de déterminer qu'il s'agit bien de cette urne dès l'obtention de la boule noire. Ainsi, reprenant la variable X introduite dans la première partie, on a

$$P_{C_1}(Y=j) = P(X=j) = \frac{1}{N}.$$

(2) L'urne U_2 ne contient que des boules blanches. Tant que celle-ci n'est pas vide, on ne peut pas être certain qu'on ne va pas tirer de boule noire et qu'il ne s'agit pas de l'urne U_1. Ainsi,

$$P_{C_2}(Y=j) = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 \leq j \leq N-1 \\ 1, & \text{si } j = N \end{cases}$$

(3) Par la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{C_1, C_2\}$, on a

$$P(Y=N) = P_{C_1}(Y=N)P(C_1) + P_{C_2}(Y=N)P(C_2) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}.$$

Comme $P_{C_2}(Y=j) = 0$ si $1 \leq j \leq N-1$, la même formule des probabilités totales donne

$$P(Y=j) = P_{C_1}(Y=j)P(C_1) = \frac{1}{2N}.$$

Remarque. On vérifie bien (ce n'est pas nécessaire ni demandé) que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} P(Y=j) &= \sum_{j=1}^{N-1} P(Y=j) + P(Y=N) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{N-1}{2N} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(4) C'est un calcul de somme

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} jP(Y=j) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} j \times \frac{1}{2N} + N\left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2N} \times \frac{(N-1)N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \\ &= \frac{N-1}{4} + \frac{N+1}{2} \\ &= \frac{3N+1}{4}. \end{aligned}$$

III - Une troisième expérience aléatoire (*Partie facultatitve hors-barême*)

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T = 4$ et $U = 1$.

(1) $T(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ car il faut au moins deux tirages pour avoir obtenu au moins une boule blanche et une boule noire.

(2) Soit $k \geqslant 2$.

$$P(T = k) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k).$$

Or les tirages s'effectuent ici avec remise donc les événements B_i et N_j sont indépendants. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(B_1)P(B_2)\ldots P(B_{k-1})P(B_k) + P(N_1)P(N_2)\ldots P(N_{k-1})P(B_k) \\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N} \end{aligned}.$$

(3) T admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(T = k)$ converge absolument autrement dit si et seulement si la série de terme général $kP(T = k)$ converge car T est à valeurs positives. Or,

$$kP(T = k) = \frac{1}{N}k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

On reconnaît ici des séries dérivées de séries géométriques qui convergent car

$$\left|\frac{1}{N}\right| < 1, \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{N-1}{N}\right| < 1.$$

Ainsi, T admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T = k) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{(1-(\frac{N-1}{N}))^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^2} - 1\right) \\ &= N - \frac{1}{N} + \frac{N}{N-1} - \frac{N-1}{N} \\ &= \frac{N^2}{N-1} - 1 \end{aligned}$$

(4) (a)

$$P(U = 1 \cap T = 2) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{N-1}{N}\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\frac{N-1}{N} = \frac{2(N-1)}{N^2}.$$

(b) Soit $k \geqslant 3$. $P(U = 1 \cap T = k) = 0$ car $U = 1$ signifie que l'on a obtenu une seule boule blanche avant d'avoir au moins une boule et une noire. Donc T ne peut prendre alors que la valeur 2.

(5) (a)

$$P([U = j] \cap [T = j+1]) = P(B_1 \cap \ldots \cap B_j \cap N_{j+1}) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j \frac{1}{N}.$$

(b) $P([U = j] \cap [T = k]) = 0$ si $k \neq j+1$ car $U = j$ signifie que l'on a obtenu j boules blanches avant d'obtenir au moins une boule de chaque couleur donc nécessairement la $j+1$ ième est noire donc $T = j+1$.

(6)
$$P(U=1)=P(U=1\cap T=2)=\frac{2(N-1)}{N^2}\neq P(U=1)P(T=2)$$
car $P(T=2)<1$. Ainsi, U et T ne sont pas indépendantes.

(7) $U(\Omega)=\mathbb{N}^*$
$$P(U=1)=\frac{2(N-1)}{N^2}$$
et $\forall j\geqslant 2$,
$$P(U=j)=P(U=j\cap T=j+1)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}.$$