ECE - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

EDHEC 2018, voie E

Solution

Exercice 1

(1) On peut voir de plusieurs façons que la matrice n'est pas inversible. Par exemple la deuxième colonne est le double de la première ou encore son déterminant est nul.

(2) Cherchons les valeurs propres

$$\begin{aligned}
\lambda \quad \text{valeur propre de} \quad A &\iff A-\lambda I_2 \quad \text{non inversible}\\
&\iff \det(A-\lambda I_2)=0\\
&\iff (1-\lambda)(6-\lambda)-6=0\\
&\iff \lambda^2-7\lambda=0\\
&\iff \lambda=0 \quad \text{ou} \quad \lambda=7
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(A)=\{0;7\}.$$

(3) Par linéarité du produit matriciel, si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et si $\lambda\in\mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda M+N)=A\,(\lambda M+N)=\lambda AM+AN=\lambda f(M)+f(N)$$

et f est bien une application linéaire. Le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ étant encore une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'application linéaire f est bien définie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même et est donc bien un endomorphisme.

(4) (a) Commençons par déterminer le noyau

$$\begin{aligned}
M=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(f) &\iff AM=0\\
&\iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t\\ 3x+6z & 3y+6t\end{pmatrix}=0\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2z\\ y &=& -2t\end{array}\right.\\
&\iff M=\begin{pmatrix} -2z & -2t\\ z & t\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il suit que
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$
Comme les deux matrices apparaissant ci-dessus sont clairement linéairement indépendantes et qu'elles engendrent le noyau de f, elles en forment une base. En particulier,
$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2.$$

(b) Par le théorème du rang, on peut donc affirmer que
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

(c) On calcule
$$\begin{aligned} f(E_1) &= AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_1 + 3E_3 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f(E_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= E_2 + 3E_4 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f(E_3) &= 2E_1 + 6E_3 = 2(E_1 + 3E_3) = 2f(E_1) \\ f(E_4) &= 2E_2 + 6E_4 = 2(E_2 + 3E_4) = 2f(E_2) \end{aligned}$$
Il découle immédiatement que
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(E_1 + 3E_3,\ E_2 + 3E_4\right).$$
La dimension de l'image étant égale à 2 et les deux matrices ci-dessus étant linéairement indépendantes, elles forment une base de l'image de f.

(5) (a) On voit que
$$f(E_1 + 3E_3) = f(E_1) + 3f(E_3) = 7f(E_1) = 7(E_1 + 3E_3)$$
et, de même
$$f(E_2 + 3E_4) = Y(E_2 + 3E_4).$$

(b) On voit alors que 7 est valeur propre pour f est que le sous-espace propre associé est de dimension au moins 2 car il contient l'image de f (d'après la question précédente). Comme de plus le noyau de f (qui est le sous-espace propre associé à 0) est aussi de dimension 2, on sait que non seulement le sous-espace propre associé à 7 est de dimension exactement égale à 2 mais, comme la somme des dimension fait 4 qui est la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'endomorphisme f est diagonalisable (et ses valeurs propres sont les mêmes que celles de A).

(6) (a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre (colonne) de A (associé à la valeur propre λ), alors
$$X^tX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$
De plus, par associativité du produit matriciel
$$f(X^tX) = AX^tX = (AX)^tX = f(X)^tX = \lambda X^tX$$
et X^tX est bien vecteur propre de f associé à λ. (On note que si X est vecteur propre pour A au départ, celui-ci ne peut être nul et qu'il en est de même pour X^tX.) Notamment, λ est aussi valeur propre de f.

(b) Réciproquement, soient λ une valeur propre de f et M un vecteur propre (élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) associé. Notant C_1 et C_2 les colonnes de M, il est clair que

$$f(M) = \lambda M \iff AM = \lambda M \iff\iff AC_i = \lambda C_i \quad (i = 1, 2).$$

En effet, si $C_1 = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, alors

$$AM = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 6z & 3y + 6t \end{pmatrix}$$

Donc

$$AM = \lambda M \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2z & = & \lambda x \\ 3x + 6z & = & \lambda z \end{array} \right. \iff AC_1 = A \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \lambda C_1$$

et même chose pour C_2. Ainsi, ces deux colonnes (qui ne peuvent pas être toutes deux simultanément nulles, sinon M serait nulle) sont donc vecteurs propres pour A associés à λ et celle-ci est bien valeur de A, ce qui termine l'équivalence souhaitée.

Exercice 2

(1) (a) L'évènement $(X = 1)$ signifie qu'on a *Pile* dès le premier lancer. Ceci dépend naturellement de la pièce lancée. Commençons par remarquer que le choix de la pièce se faisant au hasard, on a

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $\{A_i,\ i \in [\![1; 3]\!]\}$, on obtient

$$P(X = 1) = P_{A_1}(X = 1)P(A_1) + P_{A_2}(X = 1)P(A_2) + P_{A_3}(X = 1)P(A_3).$$

Le texte donne les valeurs des probabilités conditionnelles ci-dessus. Plus précisément, on obtient

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(b) On commence par écrire

$$(X = n) = \bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \cap P_n.$$

On va à nouveau utiliser la formule des probabilités totales avec le même s.c.e. Mais, on observe que, la pièce numérotée 1 amenant (presque) sûrement un *Face*,

$$P_{A_1}(X = n) = 0.$$

Comme $n \geq 2$, un lancer avec la pièce numérotée 2 amènerait un *Pile* dès le premier coup et on a une autre probabilité conditionnelle nulle $P_{A_2}(X = n) = 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, par indépendance des lancers successifs

$$P(X = n) = P_{A_0}(X = n)P(A_0) = \frac{1}{3} \prod_{k=1}^{n-1} P_{A_0}(F_k)P_{A_0}(P_n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(c) Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)=1$, on a

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1-P(X=1)-\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) \\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-1/2}-1-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(2) Les valeurs prises par X étant positives ou nulles, celle-ci admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X=k)$ converge. Or, pour $k \geq 2$,

$$kP(X=k)=k\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{6}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée, de raison $1/2$ donc convergente. Ainsi, X admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-1/2)^2}-1\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) Le théorème de transfert affirme que $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k(k-1)P(X=k)$ est convergente. On va reconnaitre cette fois un multiple du terme général de la série géométrique dérivée deux fois (toujours de raison $1/2$ donc toujours convergente). Pour $k \geq 2$,

$$k(k-1)P(X=k)=\frac{1}{12}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

Ainsi, $X(X-1)$ admet une espérance et celle-ci vaut

$$E(X(X-1))=\frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}=\frac{1}{12}\times\frac{2}{(1-1/2)^3}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}.$$

Mais, $E(X(X-1))=E(X^2-X)=E(X^2)-E(X)$. Par linéarité de l'espérance, il suit que X admet un moment d'ordre 2 (donc une variance) et par la formule de König-Huygens, on a

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2=\frac{4}{3}+1-1=\frac{4}{3}.$$

(4) La situation est totalement symétrique: une pièce équilibrée, une pièce qui donne presque sûrement *Pile* et une autre presque sûrement *Face*. Ainsi, le même raisonnement où on permutera *Pile* avec *Face* et A_1 avec A_2 permet de voir que les lois de X et Y sont les mêmes.

(5) (a) Soit $j \geq 2$, on observe que $[X=1]\cap[Y=j]$ signifie qu'on a obtenu un *Pile* au premier coup et le premier *Face* au $j-$ième coup et donc nécessairement après une succession de *Pile*, ce qui est donc la même chose que $[Y=j]$ d'où l'égalité des probabilités.

(b) Par symétrie, on obtient de même, pour $i \geq 2$, $P([X=i]\cap[Y=1])=P(X=i)$.

(6) (a) X et Y étant toutes deux à valeurs positives, si $X+Y=0$ alors $X=Y=0$. Mais une prise de valeur nulle pour X signifie que l'on a toujours obtenu dès *Face*, et ce dès le premier lancer, ainsi $Y=1\neq 0$. Donc on ne peut pas avoir $X+Y=0$. De plus, si $X+Y=2$ alors ou bien $X=Y=1$ (ce qui est impossible: le premier lancer ne peut pas être simultanément *Pile* et *Face*), ou bien $X=0$ et $Y=2$ (ou inversement). Mais $X=0$ signifie (comme dit ci-avant) qu'on obtient que des *Face* et que donc $Y=1$ et $X+Y\neq 2$. Dans le cas ou X ou Y vaut 0, on a donc $X+Y=1$ et si $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 3$,

$$[X+Y=k]=\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}F_j\cap P_k\right)\cup\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}P_j\cap F_k\right),$$

est un évènement possible. On a bien $(X+Y)(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0;2\}$.

(b) Comme énoncé ci-dessus

$$\begin{aligned}P(X+Y=1) &= P([X=0]\cap[Y=1])+P([X=1]\cap[Y=0])\\ &= P(X=0)+P(Y=0)\\ &= 2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(c) Soit $n\geq 3$. Remarquant que le résultat du premier lancier décompose l'univers, *i.e.* $\{[X=1],[Y=1]\}$ forme un s.c.e, on a

$$\begin{aligned}[X+Y=n] &= ([X+Y=n]\cap[X=1])\cup([X+Y=n]\cap[Y=1])\\ &= ([Y=n-1]\cap[X=1])\cup([X=n-1]\cap[Y=1]).\end{aligned}$$

(d) Par incompatibilité des deux évènements ci-dessus,et par la question 5a,

$$\begin{aligned}P(X+Y=n) &= P\left([Y=n-1]\cap[X=1]\right)+P\left([X=n-1]\cap[Y=1]\right)\\ &= P(Y=n-1)+P(X=n-1)\\ &= 2\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

(7) (a) On complète sans mal le script `SciLab`. La variable `piece` correspond au numéro de la pièce lancée et reçoit donc le résultat de la simulation d'une loi uniforme sur $[\![0;2]\!]$.

```
piece=grand(1,1,'uin', 0, 2)
x=1
if piece == 0 then //si on lance la piece 0
     lancer=grand(1,1,'uin', 0, 1)
     while lancer=0 //tant qu'on a des FACE
         lancer=grand(1,1,'uin',0,1) //on relance
         x=x+1
     end
     else
        if piece==1 then //si on lance la piece 1
            x=0 //on aura que des FACE
     end
disp(x)
```

(b) Si on lance la pièce numérotée 2, on a dès le premier coup *Pile* donc $X=1$, déjà initialisé.

Exercice 3

(1) Comme $a > 0$, il est clair que $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, f est continue partout sur $\mathbb{R}$: sur $]-\infty; 0[$ c'est une fonction constante (nulle), sur $[0; +\infty[$, c'est un produit de fonctions usuelles continues et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} = 0.$$

Il reste à montrer que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est convergente et que celle-ci vaut 1. Comme f est nulle sur $]-\infty; 0[$, il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale sur $[0; +\infty[$. Soit $A > 0$, on reconnait tout de suite une dérivée de la forme $u' \exp(u)$ et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} \mathrm{d}x &= \left[e^{-x^2/2a} \right]_0^A \\ &= 1 - e^{-A^2/2a} \\ &\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

et f est bien une densité de probabilité.

(2) Le calcul est en fait déjà fait ci-dessus (on remplace A par x)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2a}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(3) (a) On montre le résultat demandé en explicitant la fonction de répartition de Y

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{X^2}{2a} \leq x \right)$$

Comme $X^2/2a \geq 0$, on voit tout de suite que la probabilité (et donc la fonction de répartition) ci-dessus est nulle pour $x < 0$. Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\left(\frac{X^2}{2a} \leq x \right) \\ &= P\left(X \leq \sqrt{2ax} \right) \\ &= 1 - e^{-\left(\sqrt{2ax}\right)^2/2a} \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

et on reconnait bien la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1 comme demandé; $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(b) La question précédente permet de simuler la variable X par *inversion*. En effet, remarquant que

$$Y = \frac{X^2}{2a} \Longleftrightarrow X = \sqrt{2aY},$$

on propose le script suivant

```
a=input("a=?");
Y=grand(1,1,'exp', 1);
X=sqrt(2*a*Y).
```

(4) (a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2/2a} = x^2 e^{-x^2/2a} = g(x)$$

et la fonction est bien paire.

(b) Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; a)$, alors comme $E(Z) = 0$,

$$E(Z^2) = V(Z) = a = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2a} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \mathrm{d}t.$$

(c) Comme la fonction f est nulle sur $]-\infty; 0]$, X admet une espérance si et seulement si on a convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-x^2/2a} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} g(x) \mathrm{d}x.$$

Or, cette intégrale est convergente (notamment d'après la question précédente où on reconnait le moment d'ordre 2 d'une loi normale) et de plus, comme g est paire, la valeur de l'intégrale sur $[0; +\infty[$ est égale à la moitié de celle sur $]-\infty; +\infty[$. Au final,

$$E(X) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} g(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} \times a\sqrt{2a\pi} = \frac{\sqrt{2a\pi}}{2}.$$

(5) (a) On connait l'espérance d'une loi exponentielle; comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, on en déduit immédiatement que $E(Y) = 1$. Par ailleurs, X admet un moment d'ordre deux si et seulement si X^2 admet une espérance. Mais, $X^2 = 2aY$. Or $2aY$ admet une espérance, et par linéarité de celle-ci, on a

$$E(X^2) = 2aE(Y) = 2a.$$

(b) Par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 2a - \left(\frac{\sqrt{2a\pi}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4a - a\pi}{2} \\ &= \frac{(4-\pi)a}{2}. \end{aligned}$$

(6) (a) Comme les X_k suivent toutes les même loi que X, on a $E(X_k^2) = E(X^2) = 2a$ (pour tout $k \in [\![1; n]\!]$). Ainsi, par linéarité de l'espérance, on trouve

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \\ &= \frac{1}{2n} \times 2an \\ &= a, \end{aligned}$$

et S_n est bien un estimateur sans biais de a.

(b) Comme précédemment, on sait que $X^2 = 2aY$ et Y possède une variance (qui d'après le cours vaut $V(Y =) = 1$). Ainsi, X^2 admet une variance et d'après les propriétés de la variance

$$V(X^2) = V(2aY) = 4a^2 V(Y) = 4a^2.$$

(c) Comme S_n est un estimateur sans biais de a, son risque quadratique est égal à sa variance. Comme les X_k sont (mutuellement) indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que les X_k^2 le sont également et la variance de leur somme peut ainsi se calculer comme somme des variance. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} r_a(S_n) &= V(S_n) = V\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) \\ &= \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k^2) = \frac{1}{4n^2} nV(X^2) \\ &= \frac{a^2}{n}. \end{aligned}$$

En particulier, il est clair que $r_a(S_n) \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$. Le cours permet alors de conclure que S_n est un estimateur convergent de a.

(7) On suppose que $a < 1$.

(a) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P\left(|S_n - E(S_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

En passant à l'évènement contraire et en injectant les valeurs de l'espérance de S_n et de sa variance, on obtient comme attendu

$$\begin{aligned} P\left(|S_n - a| \leq \varepsilon\right) &\geq 1 - \frac{a^2}{n\varepsilon^2} \\ &\geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \qquad \text{(car } a < 1\text{)} \end{aligned}$$

(b) On observe que

$$a \in \left[S_n - \frac{1}{10}; S_n + \frac{1}{10}\right] \iff |S_n - a| \leq \frac{1}{10}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$1 - \frac{1}{n \times \frac{1}{100}} \geq 95\% \Longrightarrow P\left(|S_n - a| \leq \frac{1}{10}\right) \geq 95\%.$$

Il suffit alors de choisir n tel que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n \times \frac{1}{100}} \geq 95\% &\iff \frac{n - 100}{n} \geq \frac{95}{100} \\ &\iff n \geq 2000. \end{aligned}$$

Problème

Une solution proposée et rédigée par Marylène Dudognon et Laurent Foubert.

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1 + t^2\right) dt$.

Partie 1 : étude de f

(1) (a) Utilisons le théorème de positivité des intégrales.

- Premier cas : si $x \geqslant 0$.
  - $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t^2) \geqslant 0$
  - $0 \leqslant x$

  Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale,
  $$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
- Deuxième cas : si $x \leqslant 0$.
  - $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t^2) \geqslant 0$
  - $x \leqslant 0$

  Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale,
  $$\int_x^0 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \geqslant 0$$
  donc
  $$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Ainsi, f est positive sur $[0;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;0]$.

(b) On remarque que f est la primitive de $t \mapsto \ln(1+t^2)$ qui s'annule en 0. Or, $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+x^2)$.

(c) Signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t.$$
Utilisons le changement de variable $u = -t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$. On obtient :
$$f(-x) = \int_0^x \ln(1+(-u)^2)(-\mathrm{d}u) = -\int_0^x \ln(1+u^2)\mathrm{d}u = -f(x).$$
Ainsi, f est impaire.

(b) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $f''(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, f est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$. Elle admet un point d'inflexion au point de coordonnées $(0;0)$.

(3) (a) Soient a et b deux réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{at^2+(a+b)}{1+t^2}.$$

Par identification, on doit avoir : $\begin{cases} a = 1 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt$. Posons alors :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln(1+t^2) & v'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc à l'aide d'une intégration par parties,

$f(x) = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

Or d'après la question précédente,

$\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

Ainsi,

$$f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\left(x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right) = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(a) On observe que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

est une intégrale impropre en $+\infty$.

- $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$
- $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1;+\infty[$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (intégrale de Riemann)

Ainsi, d'après les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0;1]$.

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

est convergente.

(b) Nous avons démontré à la question 3)b) que $f(x) = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.Or,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\ln(1+x^2)-2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est finie d'après la question précédente.

Ainsi, $2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est négligeable devant $x(\ln(1+x^2)-2)$ au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x(\ln(1+x^2)-2)$. Puis, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

(c) Soit x un réel strictement positif, on a

$$\ln(1+x^2)=\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)=\ln(x^2)+\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=o(2\ln(x))$ au voisinage de $+\infty$, donc

$$f(x)\underset{+\infty}{\sim}2x\ln(x).$$

(d) De la même façon, si $x<0$, $f(x)=\ln(x^2)+\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)$ donc $f(x)\underset{-\infty}{\sim}\ln(x^2)=2\ln(-x)$

5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) $t\mapsto\ln(1+t^2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

b) $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ d'après les calculs précédents. D'autre part, $\forall x\in\mathbb{R}, f^{(3)}(x)=\dfrac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$. Ainsi, $f^{(3)}(0)=2$.

c) Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0, $f(x)=\dfrac{x^3}{3!}.2+o(x^3)=\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ donc $\boxed{f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^3}{3}}$

6) $f(1)=\displaystyle\int_0^1\ln(1+t^2)dt=E[\ln(1+U^2)]$ où U suit une loi uniforme sur $[0;1]$ d'après le théorème de transfert. On peut donc approcher la valeur de $f(1)$ en considérant la moyenne de la réalisation d'un échantillon de variables aléatoires suivant la même loi que $\ln(1+U^2)$.

```
U=grand (1,100 000,'unf',0,1)
V=log(1+U.^2)
f=mean(V)
disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0=1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n=\displaystyle\int_0^1\left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

7) a) Si on considère l'expression générale de u_n, $u_0=\displaystyle\int_0^1 1dt=1$ ce qui est cohérent avec la valeur de u_0 donnée.

b) $u_1=\displaystyle\int_0^1\ln(1+t^2)dt=f(1)$

8) a) Soit $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1}dt-\int_0^1\left(\ln(1+t^2)\right)^n dt=\int_0^1\left(\ln(1+t^2)\right)^n(\ln(1+t^2)-1)dt$$

- $\forall t\in[0;1]$, $\left(\ln(1+t^2)\right)^n\geqslant 0$ et $\ln(1+t^2)-1\leqslant 0$
  (en effet, $t\in[0;1]\Rightarrow 0\leqslant\ln(1+t^2)\leqslant\ln(2)\Rightarrow\ln(1+t^2)-1\leqslant 0$)
  ainsi, $\forall t\in[0;1]$, $\left(\ln(1+t^2)\right)^n(\ln(1+t^2)-1)\leqslant 0$.
- $t\mapsto\left(\ln(1+t^2)\right)^n(\ln(1+t^2)-1)$ est continue sur $[0;1]$.

Ainsi, d'après la positivité de l'intégrale, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est décroissante}}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\displaystyle\int_0^1\left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$. Or,

- $\forall t\in[0;1]$, $\left(\ln(1+t^2)\right)^n\geqslant 0$
- $t\mapsto\left(\ln(1+t^2)\right)^n$ est continue sur $[0;1]$.

Ainsi, d'après la positivité de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$ et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par 0.}}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. (théorème de convergence des suites monotones)

9) a) Soit $t \in [0;1]$. On alors :
$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \Rightarrow 0 \leqslant \left(\ln(1+t^2)\right)^n \leqslant (\ln 2)^n$.
Ot $t \mapsto \left(\ln(1+t^2)\right)^n$ est continue sur $[0;1]$ donc en intégrant, on obtient :
$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \leqslant \int_0^1 (\ln(2))^n\, dt$ soit $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n}$

b) • On a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$ donc d'après le théorème de l'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

• On a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$ et la série de terme général $(\ln 2)^n$ converge en tant que série géométrique car $|\ln(2)| < 1$. Ainsi, d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

10) a) Montrer que : Soit $t \in [0;1]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \quad &\Rightarrow \quad 1-\ln(2) \leqslant 1-\ln(1+t^2) \leqslant 1 \\
&\Rightarrow \quad 1 \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)} \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)} \text{ car } (\ln(1+t^2))^n \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)} dt \text{ les fonctions sont continu} \\
&\Rightarrow \quad \int_0^1 0 \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{u_n}{1-\ln(2)}
\end{aligned}$$

b) On a :
$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc d'après le théorème de l'encadrement,
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0}$

c) Soit n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k\right) dt \text{ linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \text{ somme des termes d'une suite géométrique}
\end{aligned}$$

d) Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{dt}.$$

Or d'après la question 10)b),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{dt} = 0$$

donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

e) Cette fois-ci la fonction intégrande n'est pas f mais $t \mapsto \dfrac{1}{1-f(t)}$ d'où le script suivant :

```
U=grand (1,100 000,'unf',0,1)
V=log(1+U.^2)
f=mean((1-V)^(-1))
disp(f)
```