ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°4 - sujet type EML

Solution

Exercice 1

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}.$$

Partie I : Détermination d'extrema de f

(1) La fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Par composition de $(x, y) \mapsto x$ par $t \mapsto \exp(-t)$ respectivement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$, la fonction $(x, y) \mapsto e^{-x}$ est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Par somme, f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Posons , pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^{-x} - x$. La fonction φ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles dérivables. Sa dérivée vaut $\varphi'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{x\to+\infty} \varphi(x); \lim_{x\to-\infty} \varphi(x)[=] - \infty; +\infty[$. En particulier, tout réel admet un unique antécédent par φ. C'est donc le cas de 0. Autrement dit, l'équation $e^{-x} - x = 0 \iff e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

(3) (a) La première figure représente la surface d'équation $z = f(x, y)$ pour $(x, y) \in [-1; 2]^2$. La seconde représente les lignes de niveaux $f(x) = a$ pour a suivant une progression arithmétique de raison 0.05, de premier terme inférieur ou égal à 0.75 et de dernier terme 2.

(b) Il semblerait que f présente un minimum (local) en (x_0, y_0) avec $0.4 \leq x_0 \leq 0.8$ et $0.1 \leq y_0 \leq 0.4$ et que $f(x_0, y_0) < 0.75$.

(c) On a recopié et complété le script `SciLab` correspondant aux figures précédentes.

```
function z=f(x,y)
    z=x^2-2*x*y+2*y^2+exp(-x)
endfunction
x=[-1:0.1:2]; y=x;
z=feval(x,y,f)
plot3d(x,y,z) ; scf() ; //scf ouvre une nouvelle fenêtre
contour(x,y,f, [-1:0.05:2])
```

(4) Par définition, (x,y) point critique de f si et seulement si $\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y) = 0$. Or,

$$\partial_1 f(x,y) = 2x - 2y - e^{-x}, \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = -2x + 4y.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } f \quad & \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y - e^{-x} & = & 0 \\ -2x + 4y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2(x/2) - e^{-x} & = & 0 \\ y & = & x/2 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - e^{-x} & = & 0 \\ y & = & x/2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

et on a bien l'équivalence voulue.

(5) D'après la Question (2), l'équation $x - e^{-x}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on note x_0. Il suit, d'après la question précédente, que f admet un unique point critique, noté (x_0, y_0) où on a posé $y_0 = x_0/2$.

(6) Afin de préciser la nature de ce point critique, il faut former la hessienne et donc calculer les dérivées secondes de f. On a

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 2 + e^{-x}, \qquad \partial^2_{2,2} f(x,y) = 4$$

et par le lemme de Schwarz

$$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -2.$$

Ainsi,

$$H = \nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 + e^{-x_0} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + x_0 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } H \quad & \Longleftrightarrow \quad H - \lambda I_2 \quad \text{non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad \det(H - \lambda I_2) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (2 + x_0 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - (6 + x_0)\lambda + 4(1 + x_0) = 0
\end{aligned}$$

Cette équation du second degré est un peu pénible. On peut quand même arriver à conclure avec deux méthodes.:

- *Méthode 1*: liens coefficients/racines. On a déjà vu que si λ_1, λ_2 sont les deux racines du polynôme du second degré ci-dessus, alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 6 + x_0 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = & 4(1 + x_0) \end{array} \right.$$

  Sachant que $\varphi(0) = 0$ et que φ décroissante, on a $x_0 > 0$. Par conséquent $4(1 + x_0) > 0$ donc les deux racines sont de mêmes signe et comme $6 + x_0 > 0$, ce signe est positif, donnant lieu à la présence d'un maximum local.

- *Méthode 2* : avec le discriminant. Le calcul du discriminant donne

$$\Delta = (6 + x_0)^2 - 16(1 + x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 20 = (x_0 - 2)^2 + 16 > 0.$$

  Il y a donc deux racines qui valent

$$\lambda_1 = \frac{6 + x_0 + \sqrt{(x_0 - 2)^2 + 16}}{2}, \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{6 + x_0 - \sqrt{(x_0 - 2)^2 + 16}}{2}.$$

Comme λ_1 est clairement positive (car $x_0 > 0$), il reste à vérifier que $\lambda_2 > 0$ également. Comme $\varphi(1) = e^{-1} - 1 < 0$, on sait aussi que $x_0 < 1$. Donc $1 < 2 - x_0 < 2$ et ainsi $1 < (2 - x_0)^2 < 4$ pour enfin obtenir que

$$\sqrt{(x_0 - 2)^2 + 16} < \sqrt{20} < 5 < 6 + x_0$$

et donc $\lambda_2 > 0$ ce qui donne bien encore que f présente en (x_0, y_0) un minimum local. Ouf!

Partie II : Etude d'une fonction g

(7) On introduit la fonction g, définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1 + x}{1 + e^x}.$$

(a) On résout (sans utiliser le théorème de bijection) par équivalences cette équation:

$$\begin{aligned} g(x) = x \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1+x}{1+e^x} = x \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 + x = x + xe^x \Longleftrightarrow 1 = xe^x \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{-x} = x \\ &\Longleftrightarrow \quad x = x_0, \end{aligned}$$

ce qui est bien ce qu'on voulait. De plus, on sait déjà (car $\varphi(1) < 0$) que $x_0 < 1$. Observons que

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} > 0$$

car $\sqrt{e} < \sqrt{4} = 2$. Donc on a bien, par décroissante de φ

$$\frac{1}{2} < x_0 < 1.$$

(b) Par quotient de fonctions usuelles dérivables sur $[0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et le calcul donne

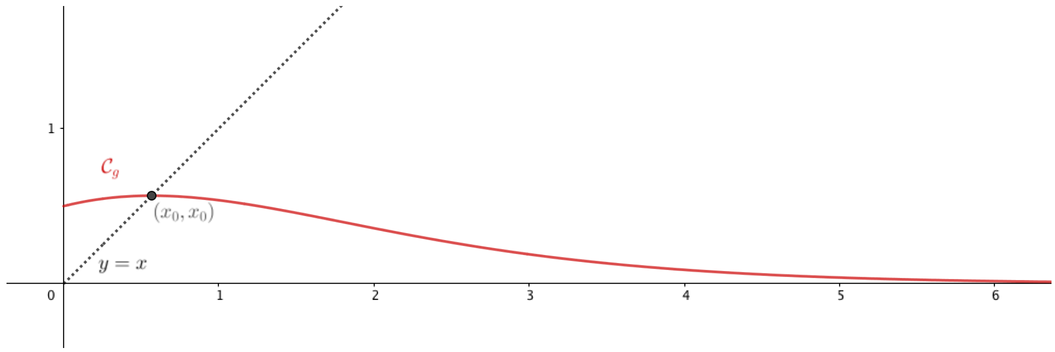
$$g'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^{-x} - x}{e^x(1 + e^x)^2} = \frac{\varphi(x)}{e^x(1 + e^x)^2},$$

où on a choisi de faire apparaître la fonction φ précédemment étudiée au numérateur car on connait ses variations et la valeur où elle s'annule (x_0) donc son signe. De plus, $g(0) = 1/2$ et

$$g(x) \sim \frac{x}{e^x} \longrightarrow 0, x \to +\infty \quad \text{(croissance comparée).}$$

Ceci permet donc de dresser le tableau de variations de g puis de tracer l'*allure* de sa courbe représentative. Il parait naturel de tracer la droite $y = x$ car l'abscisse du point d'intersection est la valeur où g change de sens variation.

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$1/2$	$\nearrow$	x_0	$\searrow$	0



Partie III : Etude d'une suite récurrente (u_n)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

(8) L'énoncé de la question est succinct et nécessite un peu d'initiative pour appliquer le théorème de convergence monotone. Notamment de penser à vérifier, par une récurrence rapide que $u_n \in [0, x_0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car c'est l'intervalle où la fonction g est croissante. Cette vérification se fait sans difficulté

- initialisation: $u_0 = 0 \in [0; x_0]$.
- hérédité: si $u_n \in [0; x_0]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, comme g est croissante sur cet intervalle on a $u_{n+1} = g(u_n) \in [g(0); g(x_0)] = [1/2; x_0] \subset [0; x_0]$, ce qui termine la récurrence.

C'est une autre récurrence immédiate pour vérifier que (u_n) est croissante.

- initialisation: $u_0 = 0 \leq \frac{1}{2} = g(0) = u_1$.
- hérédité: si $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, comme g est croissante sur l'intervalle où vivent tous les termes de la suite, on a

$$u_{n+1} = g(u_n) \leq g(u_{n+1}) = u_{n+2},$$

ce qui termine la récurrence.

La suite (u_n) est croissante et majorée par x_0 donc, par le théorème de convergence monotone, celle-ci converge vers un réel ℓ. Par continuité de la fonction g, on a par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, que $\ell = g(\ell)$ ce qui donne, par la Question (7)(a), que $\ell = x_0$ et on a bien montré que (u_n) convergeait vers x_0.

(9) (a) Cette question est un peu fastidieuse. On peut dériver g' pour avoir ses variations. Observons que

$$g''(x) = \frac{e^x(1 + (x-1)e^x)}{(1+e^x)^3}$$

dont le signe est donné par $1 + (x-1)e^x$. Mais, pour $1/2 \leq x \leq 1$, on a $(x-1) \leq 0$ et $e^x > 1$ donc

$$(x-1)e^x \leq -1 \Longrightarrow 1 + (x-1)e^x \leq 0$$

et g' décroissante sur $[1/2; 1]$.

Ainsi

$$-0,125 \leq -0,124 \simeq g'(1) \leq g'(x) \leq g(1/2) \simeq 0,025 \leq 0,125.$$

Il suit qu'on a bien

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \qquad |g'(x)| \leq 0,125.$$

(b) C'est une récurrence.

- <u>initialisation:</u> Pour $n = 1$,

$$|u_1 - x_0| = x_0 - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} = (0,125)^0 \cdot 0,5$$

car $x_0 \in [1/2; 1]$.

- <u>hérédité:</u> Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|u_n - x_0| \leq (0,125)^{n-1} \cdot 0,5,$$

alors, comme g est $\mathcal{C}^1$ sur $[1/2; 1]$, que tous les termes de la suite sont dans $[1/2; x_0] \subset [1/2; 1]$ tout comme x_0 et que $|g'(x)|$ y est majoré par $0,125$ (d'après la question précédente), l'inégalité des accroissements finis appliquée à g sur $[1/2; 1]$ permet d'affirmer que

$$|u_{n+1} - x_0| = |g(u_n) - g(x_0)| \leq 0,125|u_n - x_0|.$$

En combinant avec l'hypothèse de récurrence, on obtient donc

$$|u_{n+1} - x_0| \leq (0,125) \cdot (0,125)^{n-1} \cdot 0,5 = (0,125)^n \cdot 0,5$$

ce qui est bien la propriété au rang $n + 1$ et termine la récurrence.

(c) On utilise la majoration précédente pour calculer u_n avec un écart à sa limite assez petit, c'est à dire qu'on calcule u_n tant que l'écart est trop grand

```
u=0
n=0
while (0.125)^(n-1)*(0.5) > 10^(-8)
    u=(1+u)/(1+exp(u));
    n=n+1;
end
disp(u)
```

(10) Par définition de f

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 - 2x_0y_0 + 2y_0^2 + e^{-x_0}.$$

Sachant que $e^{-x_0} = x_0$ et que $y_0 = x_0/2$, on obtient

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 - 2x_0 \cdot \frac{x_0}{2} + 2\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 + x_0 = \frac{x_0^2}{2} + x_0,$$

ce qu'on voulait.

On complète alors le programme précédent avec l'ajout de la ligne

```
disp(u^2/2+u)
```

Observons alors que l'erreur d'approximation est de l'ordre de 10^{-7}:

$$\left|\frac{u^2}{2} + u - \frac{x_0^2}{2} - x_0\right| \leq \frac{|u^2 - x_0|}{2} + |u - x_0| = |u - x_0|\left(\frac{|u + x_0|}{2} + 1\right) \leq 2|u - x_0| = 2 \times 10^{-8} \leq 10^{-7}.$$

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

(1) Compléter la construction suivante de la matrice A en `SciLab` en remplaçant les tirets par des matrices de type `ones`, `zeros` ou `diag`.

```
A= ones(3,3) + diag([0, 0, 2])
```

(2) La matrice A est symétrique, elle est donc diagonalisable. Ayant deux fois la même colonne, il est clair que $\mathrm{rg}(A) \leq 2$ et donc que A n'est pas inversible (en particulier 0 est valeur propre de A). Plus précisément,

$$\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 2,$$

car les deux vecteurs restants sont clairement non colinéaires.

(3) Comme on vient de le dire, 0 est valeur propre de A. De plus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+y+3z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

De même,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-I) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y+z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -z \\ x & = & -z \end{array} \right.$$

Ainsi, 1 est bien valeur propre et

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Enfin,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-4I) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -3x+y+z & = & 0 \\ x-3y+z & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 4y-2z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z-y = 2y-y = y \\ z & = & 2y \end{array} \right.$$

Ainsi, 4 est bien valeur propre et

$$E_4(A) = \mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(4) Par concaténation des sous-espaces propres, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de vecteurs propres de A. En notant P la matrice de passage de la base canonique vers cette base, c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base donne bien $A = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(5) Un pivot de Gauss simultané sur P et sur la matrice identité permet de trouver

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(6) Sans difficulté, il suffit de prendre

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7) On note $R = P\Delta P^{-1}$. On a immédiatement

$$R^2 = \left(P\Delta P^{-1}\right)^2 = P\Delta P^{-1} P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Le calcul donne

$$R = P\Delta P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et R.

On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

(8) Il est clair et immédiat que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{C}) = D, \quad \mathrm{Mat}(g, \mathcal{C}) = \Delta.$$

(9) (a) On a déjà répondu à cette question *via* la recherche du sous-espace propre associé à 0. Le noyau de f est de dimension 1 et

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(b) Même chose car on a calculé le rang de f. L'image de f est de dimension 2 et

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

(10) (a) L'image de g est engendrée par les colonnes de R. Comme les deux dernières colonnes ne sont pas colinéaires (et que les deux premières sont les mêmes), on voit que g est de rang 2 (son image est de dimension 2) et que

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

(b) Par le théorème du rang, le noyau de g est de dimension 1. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul qui en est un élément pour avoir une base de celui-ci. Comme les deux premières colonnes de R sont les mêmes, il suit que $g(e_1) = g(e_2)$ et que $g(e_1 - e - 2) = 0$ donc $e_1 - e_2 \in \mathrm{Ker}(g)$ et donc

$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(11) Notant H la matrice de l'endomorphisme cherché dans la base $\mathcal{C}$, on cherche donc une matrice

$$H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

telle que $DH = \Delta$. Mais

$$DH = \Delta \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} d & = & 0 \\ e & = & 1 \\ f & = & 0 \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \\ i & = & 1/2 \end{array} \right.$$

On a aucune contrainte sur a, b, c. Mais on nous demande **une** matrice. Il **suffit** de prendre

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et h l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est donné par

$$PHP^{-1}.$$

Exercice 3 - D'après ECRICOME 2018

Partie I

(1) Á chacun des trois lancers, on a une probabilité $p = 2/3$ d'obtenir *Pile* (et 1/3 pour l'alternative contraire), on reconnait en X une loi binomiale

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$

(2) On voit que

$$P(A) = P([X=0] \cup [X=2]) = P([X=0]) + P([X=2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1+3\times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

(3) Pour chaque valeur de X, on a une valeur différente de G. Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

(4) On calcule l'espérance

$$\begin{array}{rcl} E(G) & = & -30P(G=-30) - 10P(G=-10) + 20P(G=20) \\ & = & -30P(X=3) - 10P(X=1) + 20P(X=2) \\ & = & -30\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\ & = & \frac{-60}{27} = -\frac{20}{9} \end{array}$$

On trouve donc que $E(G) < 0$ et le jeu est défavorable au joueur.

Partie II

(1) (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,
$$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$
et on a bien $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

(b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc
$$E(Y) = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

(2) (a) Comme précédemment, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

(b) D'après le théorème de transfert
$$\begin{aligned} E(Y) &= E((-1)^X) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$
On utilise alors la formule du binôme
$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p + 1 - p)^n = (1 - 2p)^n.$$

(3) D'après les questions 1b. et 2b., on a
$$(1 - 2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \Longleftrightarrow P(A) = \frac{(1-2p)^n + 1}{2}.$$

(4) On résout
$$\begin{aligned} P(A) \geq \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow \frac{(1-2p)^n + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow (1-2p)^n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow n \text{ pair ou } 1 - 2p \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie III

(1) On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X, ou encore
$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$
Toujours avec le théorème de transfert, on obtient
$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k P(X = k) \\ &= 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

(2) Soit $k \in [\![1; n]\!]$.
$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(3) C'est un peu le même calcul que celui justifiant la formule de l'espérance de la binomiale.

$$\begin{aligned}
E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \\
&= -10np(1-2p)^{n-1}
\end{aligned}$$

(4) On connait déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\
&\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\
&\iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n\text{impair}
\end{aligned}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

(5) (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a foriori* sur $[0;1/2]$. Le calcul donne

$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(1/2n)$	$\searrow$	0

avec

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0;1/2]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$

Partie IV

(1) Ici, on explicite facilement la loi de G_i en revenant à la définition du jeu. $G_i(\Omega) = \{0, -10, 20\}$. et

a	0	-10	20
$P(G_i = a)$	$9/16$	$6/16$	$1/16$

Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance

$$E(G_i) = -10 \times \frac{9}{16} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}$$

et

$$V(G_i) = E(G_i^2) = E(G_i)^2 = 100 \times \frac{9}{16} + 400 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

(2) Il est clair que le gain du forain est égal à l'opposé du total des gains de tous les joueurs, ou encore

$$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -200 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 500$$

et, par indépendance (que l'on peut supposer) des G_i,

$$V(J) = (-1)^2 \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250.$$

(3)

$$\begin{aligned} |J-500| \geq 400 &\iff J-500 \geq 400 \text{ ou } J-500 \leq -400 \\ &\iff J \geq 900 \text{ ou } J \leq 100 \end{aligned}$$

En particulier, l'évènement

$$[J \leq 100] \subset [|J-500| \geq 400]$$

et on a bien la comparaison des probabilités correspondantes voulue.

(4) En utilisant la question précédente et l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on voit que

$$P(J \leq 100) \leq P(|J-500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$

(5) Le forain installera son stand si $P(J \leq 100) \leq 10\%$. Or, cette probabilité est majorée par $9/128$ qui est inférieur à 10% (en effet $9/128 \leq 9/100 < 10\%$). Donc il peut installer son stand.