ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°4

Solution

Exercice 1 - (court) Extrait d'ECRICOME 2016

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x.$$

(1) Pour $n = 0$, l'intégrale I_0 que l'on doit calculer est
$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}.$$
Soit donc $A > 0$.
$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} &= \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$
Ainsi, I_0 est bien convergente et
$$I_0 = 1.$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto ((\ln(1+x))^n/(1+x)^2$ est continue sur $[0:1]$, donc
$$\int_0^1 \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$
est bien définie. Il reste à vérifier la convergence de l'intégrale à l'infini. Comme la fonction $x \mapsto (\ln(1+x))^n/(1+x)^2$ est positive sur $[0;+\infty[$, que
$$\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$
et que (par critère de Riemann) l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$$
converge, le critère d'équivalence pour les fonctions positives permet d'affirmer que
$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

est également convergente et ainsi I_n est bien définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) On fait bien attention à faire l'intégration par partie sur $[0; A]$ après avoir fixé $A > 0$. Soit donc $A > 0$. Les fonctions $u(x) = (\ln(1+x))^{n+1}$ et $v'(x) = 1/(1+x)^2$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$ rendant licite l'intégration par parties. Ainsi, on a

$$u'(x) = \frac{(n+1)(\ln(1+x))^n}{1+x}, \qquad v(x) = -\frac{1}{1+x}$$

et la formule d'IPP donne

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{(\ln(1+A))^n}{1+A} = 0$$

et, comme on a prouvé la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = I_n.$$

On a donc bien $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

(4) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- <u>initialisation:</u> Pour $n = 0$, on a $I_0 = 1 = 0!$ et la relation est bien vérifiée.

- <u>hérédité:</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $I_n = n!$. D'après la question précédente, on a alors

$$I_{n+1} = (n+1)I_n \underset{\text{HR}}{=} (n+1)n! = (n+1)!,$$

  et la relation est bien vérifiée au rang $(n+1)$ ce qui termine la récurrence.

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$. On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ (E est donc un sous-espace vectoriel est de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) et Δ l'endomorphisme de E défini par

$$\Delta : g \longmapsto g'.$$

(1) Montrons que la famille (f_1, f_2) est libre en montrant que f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel quel $f_2 = \lambda f_1$, ce qui signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad xe^{\alpha x} = \lambda e^{\alpha x}.$$

Comme une exponentielle ne s'annule jamais, ceci donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x = \lambda,$$

ce qui est clairement impossible (dès que $x \neq \lambda$). Ainsi la famille est libre. Comme elle engendre (par définition de E) l'espace E, elle en forme une base. En particulier, $\dim(E) = 2$.

(2) Il faut calculer les images des vecteurs de la base

$$\begin{aligned} \Delta f_1(x) &= f_1'(x) = \alpha e^{\alpha x} \\ &= \alpha f_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta f_2(x) &= f_2'(x) = e^{\alpha x} + x\alpha e^{\alpha x} \\ &= f_1(x) + \alpha f_2(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire la matrice de Δ dans la base (f_1, f_2):

$$A = \mathrm{Mat}\,(\Delta, (f_1, f_2)) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(3) Pour montrer que l'endomorphisme Δ est un automorphisme, il suffit de justifier que la matrice précédente est inversible, ce qui peut se faire à l'aide du déterminant (qui vaut ici $\alpha^2 \neq 0$ - car α est supposé strictement positif) ou car la matrice est triangulaire supérieure avec pour seul coefficient diagonal α qui est non nul.

Remarque. L'endomorphisme Δ est donc ici un automorphisme **de** E. On fera bien attention à comprendre que l'application consistant à dériver est bijective lorsqu'on la regarde sur l'espace E. Si celle-ci est toujours bien linéaire sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ou sur $\mathbb{R}_n[X]$, elle n'y est plus du tout bijective.

(4) Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{pmatrix},$$

de sorte qu'on peut conjecturer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix},$$

ce que l'on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Il n'est nécessaire que de montrer le caractère héréditaire de la propriété, celle-ci étant déjà initialisée. Supposons donc que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & (n+1)\alpha^n \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la propriété au rang $(n+1)$ et termine la récurrence.

(5) Dériver n fois revient à appliquer Δ^n dont la matrice est justement A^n. Comme f_1 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (f_1, f_2), on a

$$\Delta^n f_1 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^n f_1 + 0 f_2$$

donc

$$f_1^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

De la même manière,

$$\Delta^n f_2 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\alpha^{n-1} \\ \alpha^n \end{pmatrix} = n\alpha^{n-1} f_1 + \alpha^n f_2$$

et donc

$$f_2^{(n)}(x) = \left(n\alpha^{n-1} + \alpha^n x\right) e^{\alpha x}.$$

Exercice 3 - D'après EDHEC 2013

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{et} \quad A^3 = 0$$

(b) On résout

$$\begin{aligned} X = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \quad & \Longleftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y + 2z & = & 0 \\ -x - y - z & = & 0 \\ -x - z & = & 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y & = & 0 \\ z & = & -x \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad X = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1) \end{aligned}$$

Ainsi, posant $u = (1, 0, -1)$, on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$ et u étant non nul, il forme bien une base du noyau de f qui est alors de dimension 1. Par le théorème du rang, l'image de f est alors de dimension 2. Il suffit de prendre deux colonnes de la matrice de f qui ne soient pas colinéaires, disons les deux premières, pour avoir une base de l'image. En posant

$$v = (2, -1, -1), \quad \text{et} \quad w = (1, -1, 0),$$

on a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v, w)$ et (v, w) forme bien une base de l'image de f.

(c) D'après le calcul de A^2 (qui est la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il est clair que (comme trois fois la même colonne qui correspond aux coordonnées de u dans la base canonique)

$$\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Vect}(u) = \mathrm{Ker}(f).$$

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de R^3 tel que

$$g^2 \neq 0, \qquad \text{et} \qquad g^3 = 0,$$

ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ on a donc : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\,(g^2) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

(2) (a) Comme $g^2 \neq 0$, il existe nécessairement $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$ (sinon g^2 enverrait tout élément sur 0 et serait l'endomorphisme nul).

(b) Comme on est en dimension 3 et en présence de 3 vecteurs, il suffit de montrer que la famille est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$au + bg(u) + cg^2(u) = 0 \qquad\qquad (\star).$$

En appliquant g^2 à la relation $(\star)$, comme $g^3 = g^4 = 0$, on obtient

$$g^2\left(au + bg(u) + cg^2(u)\right) = ag^2(u) = 0.$$

Mais comme $g^2(u) \neq 0$, on a nécessairement $a = 0$. Ainsi, $(\star)$ devient

$$bg(u) + cg^2(u) = 0.$$

On applique alors maintenant g et on obtient

$$g(bg(u) + cg^2(u)) = bg^2(u) = 0$$

et comme précédemment $b = 0$. Il ne reste dans $(\star)$ que $cg^2(u) = 0$ qui donne $c = 0$. On a bien $a = b = bc = 0$ ce qui montre bien que la famille est libre et que celle-ci forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Par définition de la matrice d'une application dans une base, et comme $g(g^2(u)) = g^3(u) = 0$, on a

$$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) On voit avec la matrice ci-dessus que le rang de g est alors 2 (la dimension de son noyau est 1). Attention, les colonnes ici donnent les coordonnées (et les coordonnées seulement) dans la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs que l'on va prendre pour l'image et la noyau. On a clairement

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(u), g^2(u)), \qquad \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(g^2(u)).$$

La matrice de g^2 dans cette même base est alors

$$\mathrm{Mat}(g^2, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire (observant que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne correspondant aux coordonnées de $g^2(u)$ dans $\mathcal{B}'$)

$$\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{Vect}(g^2(u)) = \mathrm{Ker}(g),$$

ce qui est bien la conclusion souhaitée.