ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°5

À rendre le 18/12

Exercice 1

On considère, pour n entier naturel non nul, les fonctions f_n et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}, \qquad h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

(1) Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

(2) (a) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

(b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ est convergente. On notera K sa valeur.

(3) (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$ et que celle-ci vaut $-K$.

(b) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\,\mathrm{d}x$ converge et est égale à $2K$.

(c) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

(4) (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif: $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$.
En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\quad h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

(c) En déduire successivement

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leqslant \frac{K}{n+1},$$

puis que

$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

(d) Montrer enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2}, & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Montrer que f est paire. Représenter sommairement la courbe de f.

(2) Montrer que f est une densité de probabilité. Dans toute la suite on note X une v.a. dont f est une densité ainsi que F_X sa fonction de répartition.

(3) Exprimer $F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(4) X admet-elle une espérance ?

(5) On pose ensuite $Y = \ln(|X|)$. On **admet** que Y est une v.a définie sur le même espace probabilisé et on note sa fonction de répartition F_Y.
   (a) Montrer que, pour tout x réel, on a $F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$.
   (b) En déduire que Y est une v.a à densité que l'on reconnaîtra.

(6) (a) Montrer que
      (i) Si $x < 0$, alors $1 - e^{-x} < 0$;
      (ii) Si $x \geq 0$, alors $1 - e^{-x} \in [0; 1[$
   (b) On considère une v.a U de loi uniforme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1[)$. Déterminer la fonction de répartition et reconnaître la loi de $Z = -\ln(1 - U)$.

(7) Écrire, sous `SciLab`, alors une fonction `Y=DM5()` permettant de simuler la variable aléatoire Y.

(8) Écrire ensuite un script permettant de représenter l'histogramme des valeurs obtenues lors de 10000 simulations de Y, avec des classes de largeur 0.1, entre 0 et 10. Superposer la courbe d'une densité de Y au même graphique.