ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°6

Solution

Exercice 1- D'après EML 2018

Une solution proposée par G.Dupont du Lycée Gerville-Réache (Guadeloupe).

(1) (a) On a $v = f(e_1) + e_1$ mais, puisque A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la lecture de sa première colonne permet d'affirmer que $f(e_1) = -2e_2 + e_3$. Ainsi,

$$\boxed{v = f(e_1) + e_1 = e_1 - 2e_2 + e_3.}$$

(b) Montrons que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est libre. Soient $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v + \gamma e_1 = 0 &\Leftrightarrow \lambda(e_1 - e_2) + \mu(e_1 - 2e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu + \gamma)e_1 + (-\lambda - 2\mu)e_2 + \mu e_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda + \mu + \gamma & = 0 \\ -\lambda - 2\mu & = 0 \\ \mu & = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il vient :

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

(c) Par définition de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.}$$

Pour calculer P^{-1}, on peut procéder à un calcul d'inverse mais on peut plus élégamment utiliser le fait que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et que, si l'on pose $e_1' = u$, $e_2' = v$

et $e'_3 = e_1$, alors on a les relations :

$$\begin{cases} e_1 &= e'_3 \\ e_2 &= e'_3 - e'_1 \\ e_3 &= -2e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

(2) (a) D'après la formule de changement de base, on a

$$A' = P^{-1}AP$$

et donc, en effectuant le produit, on obtient

$$\boxed{A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.}$$

(b) La matrice A' est triangulaire, ses valeurs propres sont donc situées sur sa diagonale. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ et puisque A' est une matrice représentative de l'endomorphisme f, il vient :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 2\}.}$$

En outre,

$$\mathrm{rg}(A' - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

donc

$$\dim E_2(f) = \dim E_2(A') = \dim\ker(A' - 2I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A' - 2I_3) = 1.$$

De même,

$$\mathrm{rg}(A' + I_3) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

donc

$$\dim E_{-1}(f) = \dim E_{-1}(A') = \dim\ker(A' + I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A' + I_3) = 1.$$

Ainsi,

$$\dim E_{-1}(f) + \dim E_2(f) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

En conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

(c) D'après la question précédente, on a $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$. Ainsi, $\ker f = \{0\}$ et donc f est injectif. Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie :

$$\boxed{f \text{ est bijectif.}}$$

(d) Comme observé à la question **2.a**, on a la relation :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP.}$$

(3) (a) On calcule :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= g(1,0,0) = (1,0,-1) = e_1 - e_3 \\ g(e_2) &= g(0,1,0) = (1,2,1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ g(e_3) &= g(0,0,1) = (-1,0,1) = -e_1 + e_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

(b) Un produit matriciel direct donne :

$$\boxed{B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2B.}$$

(c) D'après **3.b**, on a $B^2 - 2B = 0$ donc $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de B. Il s'ensuit que les valeurs propres possibles pour B sont les racines de $X^2 - 2X = X(X-2)$. Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 2\}.$$

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in E_0(B) &\Leftrightarrow BX = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_0(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

De même,

$$\begin{aligned} X \in E_2(B) &\Leftrightarrow BX = 2X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 2x \\ 2y &= 2y \\ -x+y+z &= 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y-z \\ &\Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_2(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

(d) On a $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$\dim E_0(B) + \dim E_2(B) = 1 + 2 = 3$$

donc B est diagonalisable. La matrice B représentant l'endomorphisme g, on obtient :

$$\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$$

(4) (a) Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{E}$ est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.
- On a $B \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$ donc $0_3 \in \mathcal{E}$.
- Fixons $M, N \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(\lambda M + N) &= \lambda BM + BN \\ &= \lambda MA + NA \quad (\text{car } M, N \in \mathcal{E}) \\ &= (\lambda M + N)A. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda M + N \in \mathcal{E}$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

(b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$, on a donc $BM = MA$. Supposons que M est inversible. On peut alors réécrire la relation d'appartenance à $\mathcal{E}$ comme :

$$A = M^{-1}BM.$$

Les matrices A et B sont ainsi semblables. Or on a vu en **3.d** que B est diagonalisable et en **2.b** que A ne l'est pas, une contradiction. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } M \in \mathcal{E}, \text{ alors } M \text{ n'est pas inversible.}}$$

(5) (a) Le rang étant invariant par transposition, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg}({}^t(A - \lambda I_3)) = \operatorname{rg}({}^tA - \lambda I_3).}$$

(b) On a observé en **2.b** et **3.c** que $2 \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$. Mais

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3\} \\ &\underset{\mathbf{(5.a)}}{=} \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathrm{rg}({}^tA - \lambda I_3) < 3\right\} \\ &= \mathrm{Sp}({}^tA). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\alpha = 2 \in \mathrm{Sp}({}^tA) \cap \mathrm{Sp}(B).}$$

(c) On a $X \in E_2(B)$ donc $BX = 2X$ et $Y \in E_2({}^tA)$ donc ${}^tAY = 2Y$. On a ainsi,

$$\begin{aligned} BN &= BX\,{}^tY \\ &= 2X\,{}^tY \\ &= 2N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} NA &= X\,{}^tYA \\ &= X\,{}^t({}^tAY) \\ &= X\,{}^t(2Y) \\ &= 2X\,{}^tY \\ &= 2N. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{BN = NA \text{ et donc } N \in \mathcal{E}.}$$

Il reste à montrer que N est non-nulle. On commence par observer que X et Y sont non nuls, donc en particulier, si on pose $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, on a

$${}^tYY = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} y_i^2 \neq 0.$$

Par l'absurde, supposons que $N = 0_3$, on a alors :

$$\begin{aligned} N = 0_3 &\Rightarrow NY = 0 \\ &\Rightarrow X\,{}^tYY = 0 \\ &\Rightarrow X \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} y_i^2\right) = 0 \\ &\Rightarrow X = 0, \end{aligned}$$

une contradiction. Ainsi,

$$\boxed{N \in \mathcal{E} \setminus \{0_3\}.}$$

(d) On sait d'après **3.c** que $E_2(B)$ est de dimension 2. Fixons une base (X_1, X_2) de $E_2(B)$ et fixons un vecteur propre $Y \in E_2({}^tA)$. Il suit alors de la question **4.c** que $N_1 = X_1\,{}^tY$ et $N_2 = X_2\,{}^tY$ sont des éléments non nuls de $\mathcal{E}$. Montrons alors que la famille (N_1, N_2) est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3$. On a alors

$$\begin{aligned}\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3 &\Rightarrow \lambda_1 X_1\ {}^tY + \lambda_2 X_2\ {}^tY = 0_3\\ &\Rightarrow (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)\ {}^tY = 0_3.\end{aligned}$$

$E_2(B)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, si on pose $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, on a $X \in E_2(B)$ et $X\ {}^tY = 0_3$. Il suit alors de la question **4.c** que $X = 0$ et donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$. La famille (X_1, X_2) étant une base de $E_2(B)$, elle est en particulier libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi, (N_1, N_2) est une famille libre formée de deux vecteurs de $\mathcal{E}$. Il s'ensuit que :

$$\boxed{\dim \mathcal{E} \geq 2.}$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f (nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et de fonction de répartition F.
On suppose, de plus, f continue sur $\mathbb{R}_+$. On pose, pour tout réel x positif :

$$H(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie I : Étude asymptotique de la fonction H.

(1) On suppose dans cette question que X suit une loi exponentielle de paramètre 1.

(a) On rappelle que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Soit $x > 0$, on a :

$$H(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1 - e^{-t})\mathrm{d}t = \left[t + e^{-t}\right]_0^x = x + e^{-x} - 0 - 1 = x - 1 + e^{-x}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$H(x) = x - 1 + e^{-x}.$$

(c) Comme $-1 + e^{-x} \to -1$, $x \to +\infty$, on a $-1 + e^{-x} = o(x)$ au voisinage de $+\infty$ donc

$$H(x) = x - 1 + e^{-x} \sim x, \quad x \to +\infty.$$

(2) On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) La fonction f est clairement positive ou nulle partout sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $]-\infty; 0[$ comme fonction constante et sur $]0; +\infty[$ comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas. Elle n'est pas continue en 0 mais le résultat du cours nous autorise à avoir un nombre fini de points de discontinuité. Par ailleurs, soit $A \geq 0$

$$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et comme f est nulle sur $]-\infty; 0[$, on a bien la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ vers 1 et les conditions sont bien réunies pour que f soit une densité de probabilité.

(b) Par définition, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

- Si $x \leq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0.$$

- Si $x > 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

Finalement

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(c) Soit $x > 0$, on a

$$H(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [t - \ln(1+t)]_0^x = x - \ln(1+x)$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $H(x) = x - \ln(1+x)$.

(d) Montrons que $H(x) \sim x$, $x \to +\infty$. On a :

$$\frac{H(x)}{x} = 1 - \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Or,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t-1} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t}$$

car

$$\frac{\ln(t)}{t-1} \sim \frac{\ln(t)}{t}, \quad t \to +\infty$$

par quotient.
Or,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

par croissances comparées. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{H(x)}{x} = 1$$

donc $H(x) \sim x$, $x \to +\infty$.

(3) On revient au cadre général décrit par l'exercice et on suppose de plus que X admet une espérance.

(a) Comme $E(X)$ existe, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument donc elle converge puisque $tf(t) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
Par définition de la convergence d'une intégrale impropre, $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.
On a alors

$$\varphi(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

admet une limite finie en $+\infty$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = E(X).$$

(b) Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut en déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $t \mapsto t$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a, pas intégration par parties

$$\varphi(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = [tF(t)]_0^x - \int_0^x F(t)\mathrm{d}t = xF(x) - H(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = xF(x) - H(x).$$

(c) Calculons la limite du quotient $\dfrac{H(x)}{x}$ en $+\infty$.
On a d'après la question précédente :

$$H(x) = xF(x) - \varphi(x)$$

donc

$$\frac{H(x)}{x} = F(x) - \frac{\varphi(x)}{x}$$

Or,

- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ car F est une fonction de répartition;
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$ par quotient car $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = E(X)$.

Finalement, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{H(x)}{x} = 1$ ce qui prouve que

$$H(x) \sim x, \quad x \to +\infty.$$

Partie II : Une autre formule pour le calcul de l'espérance.

On **suppose**, dans cette partie la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\mathrm{d}t$$

et on note S sa valeur.

(1) Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $h : t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par produit et ainsi, $\varphi(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ est la primitive (de classe $\mathcal{C}^1$ puisque h est continue) de h qui s'annule en 0.
Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \geq 0$:

$$\varphi'(x) = h(x) = xf(x).$$

Comme f est une densité de probabilité, elle est positive donc $\varphi'(x) = xf(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
Ainsi, φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Soit $x \geq 0$. On a, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^x (1 - F(t))\mathrm{d}t - xP(X > x) &= \int_0^x 1\mathrm{d}t - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t - xP(X > x) \\ &= x - H(x) - xP(X > x) \\ &= x\big(1 - P(X > x)\big) - H(x) \\ &= xP(X \leq x) - H(x) \\ &= xF(x) - H(x) = \varphi(x)\end{aligned}$$

d'après la question 3b) de la partie I.
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \int_0^x (1 - F(t))\mathrm{d}t - xP(X > x).$$

(3) On a, par la relation de Chasles,

$$S-\int_0^x(1-F(t))\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}(1-F(t))\mathrm{d}t-\int_0^x(1-F(t))\mathrm{d}t=\int_x^{+\infty}(1-F(t))\mathrm{d}t$$

Or, comme F est une fonction de répartition, elle est majorée par 1 (c'est une probabilité). Donc pour tout $t\geq 0$, $F(t)\leq 1$ donc $1-F(t)\geq 0$.
Par positivité de l'intégrale, on obtient que : $\int_x^{+\infty}(1-F(t))\mathrm{d}t\geq 0$ et donc

$$S-\int_0^x(1-F(t))\mathrm{d}t\geq 0.$$

Finalement,

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \int_0^x(1-F(t))\mathrm{d}t\leq S.$$

(4) Pour tout $x\geq 0$, on a $xP(X>x)\geq 0$ donc

$$\varphi(x)=\int_0^x(1-F(t))\mathrm{d}t-xP(X>x)\leq\int_0^x(1-F(t))\mathrm{d}t\leq S.$$

Ainsi, φ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.
Comme φ est une fonction croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une limite finie en $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t$ converge. Comme $tf(t)\geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $tf(t)=0$ sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument et donc que $E(X)$ existe.

(5)

- Comme $x\geq 0$ et qu'une probabilité est positive, on a $xP(X>x)\geq 0$;
- D'autre part, comme f est positive, on a pour tout $t\geq x$:

$$\begin{aligned} t\geq x &\implies tf(t)\geq xf(t)\\ &\implies \int_x^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t\geq\int_x^{+\infty}xf(t)\mathrm{d}t\\ &\implies \int_x^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t\geq x\int_x^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=xP(X>x)\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad 0\leq xP(X>x)\leq\int_x^{+\infty}t\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(6) Comme X a une espérance, l'intégrale $\int_0^{+\infty}t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ et comme $\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on en déduit d'après la relation de Chasles que $\int_x^{+\infty}t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, on a :

$$\int_x^{+\infty}t\,f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t\,f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(x)-E(X).$$

Or, on a vu que $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=E(X)$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}t\,f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

(7) On a :

$$0\leq xP(X>x)\leq\int_x^{+\infty}t\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}t\,f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{x\to\infty} x\,P\left(X>x\right)=0.$$

Utilisons la relation obtenue à la question **??**

$$\varphi\left(x\right)=\int_0^x(1-F\left(t\right))\mathrm{d}t-xP\left(X>x\right)$$

qui donne :

$$\int_0^x(1-F\left(t\right))\mathrm{d}t=\varphi\left(x\right)+xP\left(X>x\right).$$

En passant à la limite dans cette relation, on obtient grâce à la question précédente :

$$\int_0^{+\infty}(1-F\left(t\right))\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x(1-F\left(t\right))\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right)+\lim_{x\to+\infty}xP\left(X>x\right)=E(X)+0=E(X).$$

Ainsi,

$$E\left(X\right)=\int_0^{+\infty}(1-F\left(t\right))\mathrm{d}t.$$

(8) On **suppose** dans cette question que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.
Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a pour tout $t\geq 0$,

$$1-F(t)=1-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}.$$

On a alors pour $A\geq 0$,

$$\int_0^A(1-F\left(t\right))\mathrm{d}t=\int_0^A e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^A=\frac{e^{-\lambda A}}{-\lambda}-\frac{1}{-\lambda}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\lambda}\qquad\text{car }\lambda>0.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty}(1-F\left(t\right))\mathrm{d}t$ converge d'après la formule de la question 7, on a $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ qui est bien la formule connue pour l'espérance de X.

Exercice 3- D'après ESCP 2011, série T

On considère la matrice M définie par :

$$M=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&0\\0&3&4\\0&0&2\end{pmatrix}$$

(1) La matrice M est triangulaire (supérieure); ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, $\mathrm{Sp}(M)=\{\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\}$ et ainsi M a trois valeurs propres distinctes. Comme M est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle est bien diagonalisable. De plus, 0 n'étant pas valeur propre, elle est également inversible.

☞ *On fera notamment attention au fait que, si M est une matrice et si $\lambda\in\mathrm{Sp}(M)$ alors $\alpha\lambda\in\mathrm{Sp}(\alpha M)$, ou encore*

$$\mathrm{Sp}(\alpha M)=\{\alpha\lambda:\lambda\in\mathrm{Sp}(M)\}.$$

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{ème}$ tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{ème}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} P[X_n = 0] \\ P[X_n = 1] \\ P[X_n = 2] \end{pmatrix}, \ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) (a) On distingue donc, comme demandé, trois cas:
- $X_0 = 2$ donc $X_0(\Omega) = \{2\}$
- Comme on peut tirer (ou pas) une boule blanche au premier tirage, on a donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$
- A partir du deuxième tirage, on aura pu tirer les deux boules blanches donc $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ pour $n \geq 2$.

(b) En utilisant la formule des probabilités totales avec le s.c.e $((X_n = 0); (X_n = 1); (X_n = 2);)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 2) \\ &= 1P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + 0.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

En effet :
- $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$ car si il n'y a pas de boules blanches après le tirage n, on est certain qu'il n'y en n'aura pas après le suivant.
- $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = 1/2$ car si il y a 1 boule blanche après le tirage n (donc une blanche et une rouge) il n'y en aura plus au suivant si on tire cette boule blanche (avec probabilité 1/2.
- $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = 0$ car l'évènement est impossible. Si il y a deux boules dans l'urne, il en restera soit 1 soit 2 après un autre tirage donc il ne peut donc y en avoir 0.

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 01P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) \\ &= 0P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 2) \\ &= 0P(X_n = 0) + 0P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_{n+1} = 0] \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 1] \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad U_{n+1} = MU_n.$$

(c) On obtient après calculs :

$$MV_1 = V_1; \quad MV_2 = \frac{1}{2}V_2; \quad MV_3 = \frac{1}{3}V_3.$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété à vérifier.

- On voit que
$$U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_0 = 0] \\ \mathbb{P}[X_0 = 1] \\ \mathbb{P}[X_0 = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
et
$$V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 V_3 = V_1 + V_2 + V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
après calculs. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors en utilisant l'HR et le résultat de la question précédente :
$$\begin{aligned} U_{n+1} = MU_n &= M\left(V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3\right) \\ &= MV_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n MV_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n MV_3 \\ &= V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2}V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V\frac{1}{3}V_3 \\ &= V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} V_3 \end{aligned}$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

(e) La loi de la variable X_n est contenue dans le vecteur U_n ce qui donne d'après la question précédente :
$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix} = U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3 = \begin{pmatrix} 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

(3) Comme $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, on a d'après la question précédente :
$$E(X_n) = 0 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \longrightarrow 0,\ n \to +\infty.$$

(4) Tant qu'on a pas obtenu de blanche, on remet la boule tirée (rouge) dans l'urne. Ainsi, T_1 représente le temps d'attente du premier succès (obtenir la boule blanche) lors de la répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes; il s'agit donc d'une loi géométrique
$$T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right).$$

(5) Il est clair que
$$\begin{aligned} (T_2 = 2) &= B_1 \cap B_2 \\ (T_2 = 3) &= (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3) \end{aligned}$$

Ainsi, par incompatibilités des alternatives et par la formules des probabilités composées

$$\begin{aligned}
P(T_2=2) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(T_2=3) &= P(B_1)P_{B_1}(R_2)P_{B_1\cap R_2}(B_3) + P(R_1)P_{R_1}(B_2)P_{R_1\cap B_2}(B_3) \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6}+\frac{1}{9} \\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}$$

(6) (a) Dire que $[T_2=n]$ signifie que la deuxième boule blanche arrive au $n-$ième tirage. C'est équivalent à dire que la première blanche arrive au cours des $n-1$ premiers tirages (ou encore qu'après $n-1$ tirages il y a 1 seule boule blanche dans l'urne) et qu'après le $n-$ième tirage, il n'y en a plus. Ainsi,

$$[T_2=n]=[X_{n-1}=1]\cap[X_n=0].$$

(b) On obtient donc

$$\begin{aligned}
P(T_2=n) &= P([X_{n-1}=1]\cap[X_n=0]) = P(X_{n-1}=1)P_{X_{n-1}=1}(X_n=0) \\
&= \frac{1}{2}P(X_{n-1}=1) \\
&= \frac{1}{2}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\
&= 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right],
\end{aligned}$$

comme attendu.

(c) La v.a. T_2 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $nP(T_2=n)$ converge absolument. Comme ici c'est une série à terme positifs, on ne s'intéresse qu'à la convergence simple. On observe que, pour $n\geq 2$,

$$nP(T_2=n)=2\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

et on reconnait une combinaison de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes (car les raisons ont des valeurs absolues strictement inférieures à 1). Ainsi cette série converge et T_2 admet une espérance.

$$\begin{aligned} E(T_2) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(T_2 = n) \\ &= 2\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 - \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + 1\right) \\ &= 3\left(4 - \frac{9}{4}\right) \\ &= \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

(7) C'est sans difficulté:

```
function X=DM6(n)
    X=zeros(1,n+1)
    X(1)=2; //on commence avec deux boules blanches
    for i=2:n+1
        if X(i-1)==0 then //s'il n'y a déjà plus de boules blanches
            X(i)=0
        else
            if rand()<=X(i-1)/(X(i-1)+1) then //nombre de blanches sur nombre
total de boules
                X(i)=X(i-1)-1; //une blanche en moins
            else
                X(i)=X(i-1) //
            end
        end
    end
endfunction

n=input('n=?')
plot2d([1:n], DM6(n-1), -1)
```