ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1. On utilise notamment que les équivalents fonctionnent bien avec les quotients.

$$(i)\ \frac{n^2+n+1}{2n+3+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

$$(ii)\ \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln(n+1)-\ln(n)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

$$(iii)\ \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\right).$$

Or,

$$n\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{3}{n^2} = \frac{3}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

Exercice 2. (Un DL d'ordre 3). On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

(1) Il suffit d'appliquer la formule précédente avec les dérivées successives des deux fonctions qui nous intéressent, évaluées en 0. On trouve

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

(2) Lorsque $n\to+\infty$, on a $1/n \to 0$. Ainsi, on utilise un DL en 0, à l'ordre 1 (cela suffit car l'énoncé demande *un* équivalent et ne précise pas davantage).

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{donc} \quad e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

De même,

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{donc} \quad \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

(3) On constate que les équivalents proposés dans la question précédente sont opposés. Ainsi, une personne un peu tête en l'air serait tentée de proposer "$u_n + v_n \sim 0$" ce qui bien entendu n'a pas de sens et que l'on aura pas fait ici (sous peine de régime à base de pain sec et d'eau croupie). On va donc utiliser les DL à l'ordre 3 (et il faut bien cela, sinon il y a compensation) pour obtenir un équivalent de $u_n + v_n$.

$$\begin{aligned}
u_n + v_n &= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
u_n + v_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. (**) Soit $\gamma > 0$. On introduit les suites

$$u_n = e^{\gamma n}, \quad \text{et} \quad v_n = n!.$$

(1) On considère le programme `SciLab` suivant

```
(1) gamma=1/4;
(2) N=100;
(3) u=exp(gamma*[1:N]);
(4) v=[1]
(5) for k=2:N
(6)     v=[v,v(k-1)*k]
(7) end
(8) w=u./v
(9) plot2d([1:N], w, -1, rect=[0,-1,100, 2]) //on modifie un peu les paramètres
 du graphique
```

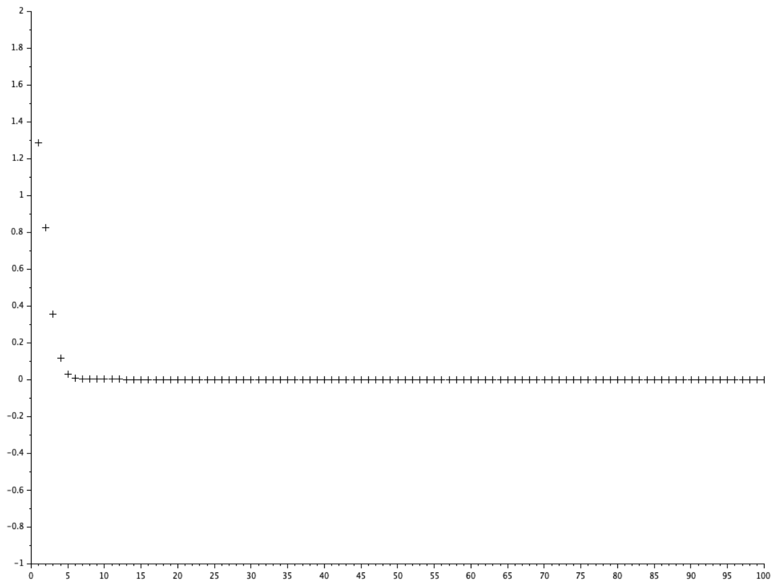
(a) La ligne permet clairement d'obtenir la liste des 100 premiers termes de la suite $e^{\gamma n}$, avec $\gamma = 1/4$ (suite appelée u_n).

(b) Les commandes mentionnées permettent d'obtenir la liste des 100 premiers termes de la suite $v_n = n!$.

(c) L'opération pointée de la ligne `(8)` permet de générer les cent premiers termes de la suite w_n définie par

$$w_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{e^{\gamma n}}{n!}.$$

La dernière ligne représente alors graphiquement les cent premiers termes de (w_n). Si recopie ce programme et qu'on l'exécute on obtient le graphique



On peut alors conjecturer que la suite (w_n) converge vers 0, ce qui est équivalent à dire que $u_n = o(v_n)$.

(2) On se propose de démontrer de façon générale le résultat conjecturé à la question précédente.

(a) Commençons par observer que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{\gamma(n+1)}}{e^{\gamma n}} = e^{\gamma}, \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

Comme $n+1 \longrightarrow +\infty$, lorsque $n \to +\infty$, la définition de limite infinie assure qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$n+1 \geq 2e^{\gamma},$$

ce qui donne bien l'inégalité demandée.

(b) C'est alors une récurrence sur $n \geq N$.

- <u>initialisation:</u> Pour $n = N$, on a

$$\frac{u_N}{v_N} = \frac{e^{\gamma N}}{N!} = C\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

ce qui correspond à la relation au rang N.

- <u>hérédité:</u> Supposons que, pour un certain $n \geq N$, on a l'inégalité souhaitée. Mais alors,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} &= \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{v_{n+1}} \\ &\leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \times C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \times \frac{v_n}{v_{n+1}} \qquad \text{(par HR)} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{v_{n+1}}{v_n} \times C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \times \frac{v_n}{v_{n+1}} \qquad \text{(d'après } 2a\text{)} \\ &\leq C\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-N}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et la récurrence est ainsi terminée.

(c) Des questions précédentes découle l'encadrement, pour $n \geq N$

$$0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de voir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0,$$

ou encore, que

$$u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow e^{\gamma n} = o(n!), \quad n \to +\infty.$$

Exercice 4. (D'après **ORAL ESM 2018**) Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1-p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers. On suppose que la variable X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) (a) L'évènement $(X = 0)$ signifie que l'on obtient aucun *Face* avant d'obtenir les deux *Pile* ce qui nécessairement impose d'obtenir deux *Pile* consécutifs aux deux premiers lancers. En notant, pour toute la suite de l'exercice P_i (resp. F_i) "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $i-$ème lancer", on peut écrire

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Concernant $(X = 1)$, il est bon de remarquer que le dernier lancer étant celui où on s'arrête, il amène nécessairement un *Pile*. Ainsi, le seul *Face* obtenu arrive au premier ou au second lancer, les deux alternatives étant incompatibles on a

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P([P_1 \cap F_2 \cap P_3] \cup [F_1 \cap P_2 \cap P_3]) \\ &= P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= p(1-p)p + (1-p)p^2 \\ &= 2(1-p)p^2 \end{aligned}$$

(b) De façon générale, dire que $(X = k)$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) signifie qu'on a obtenu k fois *Face* et deux fois *Pile*, mais le second *Pile* est nécessairement le dernier lancer. Ainsi, il y a un seul *Pile* (et k *Face*) au cours des $k+1$ premiers lancers. Chacune de ces issues a la même probabilité $(1-p)^k p^2$ de se produire, il suffit de compter qu'il y en a $k+1$ (qui correspond au façons de placer le premier *Pile* au cours des $k+1$ premiers lancers). Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P\left([P_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{k+1} \cap P_{k+2}] \cup \right. \\ &\quad \cup [F_1 \cap P_2 \cap F_3 ... \cap F_{k+1} \cap P_{k+2}] \cup \cdots \cup [F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_k \cap P_{k+1} \cap P_{k+2}]) \\ &= (k+1)(1-p)^k p^2. \end{aligned}$$

(c) On commence par voir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = (k+1)(1-p)^k p^2 = p^2(1-p) \times k(1-p)^{k-1} + p^2 \times (1-p)^k$$

et on reconnait la combinaison des termes généraux de la série géométrique et de sa dérivée de raison $(1-p)$ donc convergente. Ainsi, la série de terme général $P(X = k)$ converge et on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) &= p^2(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} + p^2 \sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k \\ &= p^2(1-p) \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))} \\ &= (1-p) + p = 1, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

(2) Notant A l'évènement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce », il est clair qu'on peut écrire

$$A = \overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = k)}.$$

Il suit que

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = k)\right) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 0,$$

ce qui signifie que l'évènement est négligeable ou, de manière équivalente, que *presque sûrement*, on obtiendra deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers.

(3) La variable X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ converge (absolument). Ici nul besoin du caractère absolu de la convergence car tout est positif. On observe que

$$kP(X = k) = k(k+1)p^2(1-p)^k = p^2(1-p) \times k(k+1)(1-p)^{k-1},$$

et on reconnaît un multiple du terme général d'une série géométrique dérivée deux fois, décalée, de raison $1 - p$, donc convergente. Il suit que X admet une espérance et que

$$\begin{aligned}
E(X) &= p^2(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} \\
&= p^2(1-p) \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1)j(1-p)^{j-2} \qquad \text{(avec le changement d'indice } j = k - 1\text{)} \\
&= p^2(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} \\
&= \frac{2(1-p)}{p}.
\end{aligned}$$

(4) Compléter le script `SciLab` ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
p=0.3;
S=0; n=0; //S= nombre de PILE, n=nombre de FACE
while S<2 //tant que le nombre de PILE <2
    n=n+1;  //on a un FACE de plus
    if rand()<p then //si on obtient un Pile
        S=S+1; //on a un PILE de plus
    end
end
disp(n)
```