Devoir de rentrée

Durée: 2 heures

Questions de cours

(1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1:n]\!]$. C'est un (simple) calcul (très classique), qui repose en partie sur l'observation que
$$(n-k)! = ((n-1)-(k-1))!.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

(2) La question précédente se réécrit
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$
permettant de remplacer le terme sommé. On fera attention cela dit au fait que cette égalité n'est vraie que pour $k \geq 1$. Mais pour $k = 0$, le terme est nul et la somme peut commencer à 0.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \qquad \text{(changement d'indice } j = k-1) \\ &= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}1^j 1^{n-1-j} \\ &= n(1+1)^{n-1} \qquad \text{(d'après la formule du binôme)} \\ &= n2^{n-1},\end{aligned}$$
ce qui est bien le résultat demandé.

Exercice 1 - D'après EML 2018

Cet exercice est aussi extrait du Concours Blanc n°2, posé par Y. Pollak en Juin 2019.

Partie I : Étude de la fonction f

(1) La fonction $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = +\infty$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(2) Sur $]0,1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]0,1[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 2$.

De même, sur $]1,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = 2$.

Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc, l'équation $f(x) = 2$ n'admet que deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$: $a \in]0,1[$ et $b \in]1,+\infty[$.

(3) On a

$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$

$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$

Par stricte croissance de f sur $[1;+\infty[$ (et donc également de la bijection réciproque de la restriction de f à cet intervalle), il suit que

$$2 \leq b \leq 4.$$

Partie II : Étude d'une suite

(1) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la suite (u_n) est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.
<u>Initialisation :</u> Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après **3**.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(b) = b - 2$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.
En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq b.$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Mais $u_n \geq b$ d'après **4** et f est croissante sur $[b, +\infty[\subset [1, +\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$

Ainsi,

$$(u_n) \text{ est décroissante.}$$

La suite (u_n) étant minorée par b d'après **4**, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

ou encore

$$f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$, on a $\ell = b$.
En conclusion,

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b.$$

(3) (a) Considérons la fonction g définie sur $[b, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geq b$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors, puisque $b \geq 2$, on a :

$$\forall x \geq b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.
La suite (u_n) convergeant vers b en décroissant, il suit de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= |u_{n+1} - b| \\ &= |g(u_n) - g(b)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - b| \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).$$

(b) La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, puisque $b \in [2;4]$ d'après **3**, il vient

$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de **6.a** que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(4) (a) Nous proposons la fonction suivante

```
function u = suite(n)
    u = 4
    for i=1:n
        u = log(u)+2
    end
endfunction
```

(b) Nous nous appuyons ici sur la question **6.b** :

```
function b = valeur_approchee(epsilon)
    n = 0
    while (1/2^(n-1) > epsilon)
        n = n+1
    end
    b = suite(n)
endfunction
```

Exercice 2 - D'après EML 2011

Cet exercice est aussi extrait du DS4 posé par Y.Pollak en ECE 1 au Printemps 2019.

(1) (a)

$$\begin{aligned}
A-\lambda I \text{ inversible} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{pmatrix} \text{ inversible}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 3-\lambda\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1-\lambda & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ inversible} \quad L_1 \leftrightarrow L_3\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 3-\lambda\\ 0 & \lambda & 2-\lambda\\ 0 & -\lambda & \lambda^2-4\lambda+2\end{pmatrix} \text{ inversible} \quad \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2\\ L_3 \leftarrow (1-\lambda)L_1 - L_3\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 3-\lambda\\ 0 & \lambda & 2-\lambda\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-4)\end{pmatrix} \text{ inversible} \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3\\
&\Leftrightarrow \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \neq 1 \text{ et } \quad \lambda \neq 4
\end{aligned}$$

Donc $A-\lambda I$ n'est pas inversible pour $\lambda \in \{0,1,4\}$.

- Pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned}
AX = 0 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+z=0\\ x+y+z=0\\ x+y+3z=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+z=0\\ 2z=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=-x\\ z=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc

$$S_0 = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right).$$

- Pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned}
AX = 1.X &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+z=x\\ x+y+z=y\\ x+y+3z=z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y+z=0\\ x\quad +z=0\\ x+y+2z=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x\quad +z=0\\ y+z=0\\ x+y+2z=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x\quad +z=0\\ y+z=0\\ y+z=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z\\ y=-z\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc

$$S_1 = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- Pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned} AX = 4.X \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} x+y+z = 4x \\ x+y+z = 4y \\ x+y+3z = 4z \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} -3x+y+z = 0 \\ x-3y+z = 0 \\ x+y-z = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} -3x+y+z = 0 \\ -8y+4z = 0 \\ 4y-2z = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ 2 = 2y \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc

$$S_4 = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(b) On inverse P par la méthode du pivot de Gauss simultané. Dès que le bloc de gauche est triangulaire sans zéro sur la diagonale, on peut conclure à l'inversibilité de P et la poursuite de pivot nous permet d'obtenir P^{-1} avec le bloc de droite.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Donc P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Après calcul (à écrire sur la copie, et qui sont plus aisés si on garde une matrice avec des coefficients entiers pour appliquer seulement à la fin le coefficient 1/6), on obtient que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) Comme $D = P^{-1}AP$, il suit que $A = PDP^{-1}$.
On montre par une récurrence classique mais à faire apparaître soigneusement que, pour

tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
Comme D est une matrice diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Après calcul de PD^nP^{-1}, on obtient que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2+4^n & 2+4^n & -2+2.4^n \\ 2+4^n & 2+4^n & -2+2.4^n \\ -2+2.4^n & -2+2.4^n & 2+4.4^n \end{pmatrix}.$$

(La formule n'est pas valable pour $n = 0$, car $0^0 \neq 0$.)

(2) (a) On constate d'abord que $P^{-1}MP = N \Leftrightarrow M = PNP^{-1}$. En utilisant la partie précédente,

$$M^2 = A \Leftrightarrow PNP^{-1}PNP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow PN^2P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow N^2 = D.$$

(b) Si $N^2 = D$, alors $ND = NN^2 = N^3 = N^2N = DN$.

(c) Si on note les coefficients de N comme suit

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

on a

$$ND = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix}$$

et

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}.$$

Comme on cherche N telle que $ND = DN$, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} 0 &= 0 \\ b &= 0 \\ 4c &= 0 \\ d &= 0 \\ e &= e \\ 4f &= f \\ 4g &= 0 \\ h &= 4h \\ 4i &= i \end{cases} \Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0.$$

(On n'a aucune contrainte sur a, e et i). Donc N est une matrice diagonale.

(d) Avec la notations précédentes, on a

$$N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix}$$

et donc on a

$$N^2 = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ e^2 = 1 \\ i^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e = 1 \text{ ou } e = -1 \\ i = 2 \text{ ou } i = -2 \end{cases}$$

Donc les solutions sont

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(e) Ainsi,

$$B = PN_0P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$