



Devoir surveillé n°2 bis

Samedi 16 Octobre
Durée : 4 heures

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 0 ou 1.

(1) *Exemple 1.* Soit A la matrice de $\mathcal{B}_2(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 .
- Quelles sont les valeurs propres de A ?
- La matrice A est-elle diagonalisable?

(2) *Exemple 2.* Soit B la matrice de $\mathcal{B}_3(\mathbb{R})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie SciLab suivantes :

```
B=[0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P=[1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P)*B*P
```

-->
1. 0. 0.
0. -1. 0.
0. 0. 1.

- Déduire les valeurs propres de B de la séquence SciLab précédente.
 - Donner une base de chacun des sous-espaces propres de B .
- (3) (a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$?
(b) Combien existe-t-il de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1?

(4) Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E . On note :

- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + id)$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - id)$;
- p la dimension de F et q la dimension de G .

On suppose que $u \circ u = id$.

- Justifier que l'image de $(u - id)$ est incluse dans F .
- En déduire l'inégalité : $p + q \geq n$.

On suppose désormais que $1 \leq p < q$. Soit (f_1, f_2, \dots, f_p) une base de F et (g_1, g_2, \dots, g_q) une base de G .

- Justifier que $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de E .
- Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$;
- Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

Problème

Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable.

On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p .

À chaque instant $n \geq 1$, un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'événement $(X_n = 1)$.

La variable M_n est supposée indépendante des variables X_k , $k \in \mathbb{N}^*$.

En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).

Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du n -ème pari. On a ainsi l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq M_{n+1} \leq C_n.$$

Le jeu est supposé favorable, on considérera dans tout le problème $\frac{1}{2} < p < 1$.

Partie 1 - Quitte ou double

(1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_{n+1} - C_n = (2X_{n+1} - 1)M_{n+1}.$$

(2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(C_n) = C_0 + (2p - 1) \sum_{k=1}^n E(M_k).$$

(3) Vérifier que

$$E(C_n) \leq C_0 + (2p - 1) \sum_{k=0}^{n-1} E(C_k).$$

Que faut-il donc miser à chacun des $n - 1$ premiers paris (*i.e* que faut-il prendre pour M_{n+1} en fonction de C_n) pour optimiser la valeur de $E(C_n)$?

(4) Montrer que

$$P \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X_n = 1] \right) = 0.$$

En déduire qu'en prenant, à chaque pari, la valeur optimale de mise trouvée à la question précédente, la ruine est quasi-certaine. Quel est le temps moyen d'attente avant la ruine ?

Partie 2 - Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1} = \alpha C_n$, avec $\alpha \in]0; 1[$ (indépendant de n).

(5) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_{n+1} = (1 + \alpha)^{X_{n+1}} (1 - \alpha)^{1 - X_{n+1}} C_n.$$

(6) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Que représente la variable aléatoire S_n ? Déterminer la loi de S_n et son espérance.

(7) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n = (1 + \alpha)^{S_n} (1 - \alpha)^{n - S_n} C_0.$$

(8) Montrer que

$$E \left[\frac{1}{n} \ln \left(\frac{C_n}{C_0} \right) \right] = p \ln(1 + \alpha) + (1 - p) \ln(1 - \alpha).$$

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

Partie 3 - Optimisation: le critère de Kelly

Soit p un paramètre, élément de $] \frac{1}{2}; 1[$. On pose, pour tout $x \in [0, 1[$

$$f(x) = p \ln(1 + x) + (1 - p) \ln(1 - x).$$

(9) **Étude de f .**

(a) Étudier les variations de f sur $]0, 1[$, et montrer que f est concave.

Montrer que f admet un maximum sur $]0, 1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p .

(b) Déterminer la limite de f en 1.

(c) Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0, 1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 1[$.

Ainsi, le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme.

(10) Que donnerait l'expression de α_K dans les cas limites $p = \frac{1}{2}$ et $p = 1$?

Interpréter ces deux résultats.

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$. On considèrera dans ce qui suit que α_c , est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

(11) On définit la fonction φ sur $]0, 1[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

(a) Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$ On notera encore φ ce prolongement.

(b) Justifier que φ est dérivable sur $]0, 1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2) [\ln(1-x)]^2}.$$

(c) Déterminer les variations de h sur $]0, 1[$.

(d) Montrer que φ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle à préciser.

(12) À l'aide du développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$, montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.

(13) (a) Établir que

$$\forall p \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

- (b) En déduire que α_c , est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\frac{1}{2}$ et que :

$$\alpha'_c \left(\frac{1}{2} \right) = 4.$$

- (c) Établir l'équivalence,

$$\alpha_c \sim 2\alpha_K, \quad p \rightarrow \frac{1}{2}.$$

En conclusion, pour des valeurs de p proches de $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables, un cas très fréquent), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$.

Par sécurité (p n'est en pratique connu qu'approximativement), les parieurs choisissent souvent

$$\alpha = \frac{\alpha_K}{2},$$

la moitié de la valeur de Kelly.

Partie 4 - Simulation informatique

- (14) Compléter la fonction SciLab ci-dessous, qui prend en argument p , la valeur de α , le capital initial C_0 et le capital à atteindre C_{obj} et renvoie le nombre de paris avant d'atteindre (ou de dépasser) l'objectif.

```
function n=paris(p, alpha, C0, C_obj)
    C=C0
    n=1
    while C< C_obj
        X=grand(1,1, 'bin', 1, p)
        C=.....
        n=.....
    end
endfunction
```

- (15) On veut vérifier que la stratégie de Kelly est optimale. Écrire ensuite une fonction d'en-tête `function [C, n]=kelly(p, alpha, C0, C_obj)` qui, par rapport à la fonction précédente, renvoie également le capital C que l'on aurait obtenu en choisissant $\alpha = \alpha_K$.