ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°3 - Sujet B

Samedi 4 Décembre
Durée : 4 heures

Problème 1

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

- (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
- (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.
- (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(n)$.
- (d) En déduire la monotonie de la suite (u_n).
- (e) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function y=u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

(2) (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- (b) Montrer que pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$.
  En déduire que la suite (v_n) est croissante.
- (c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

- (d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
- (e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
  En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ.

(3) (a) Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

(b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$$
puis que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la Question (1e) a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps=input('epsilon=?'}
n=floor(1/eps)+1
disp(u(n))
```

Partie II: Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

(4) Démontrer que la série de terme général a_n converge.

(5) (a) Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

(b) Déterminer deux réels α et β tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}.$$

(c) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(6) (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$
où (u_n) est la suite définie dans la Partie I.

(b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

(7) (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

(b) Retrouver alors le résultat de la Question (6b)

Problème 2

Les résultats de la Partie I peuvent être admis et utilisés dans la suite du problème. La Partie II sous `SciLab` *est également indépendante de la Partie III.*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. Dans une tombola, il y a n tickets (numérotés de 1 à n) dans une urne dont p sont gagnants et connus à l'avance par l'organisateur du jeu (et les autres perdants).

On suppose, dans tout l'exercice que $p \leq \dfrac{n}{3}$.

Un joueur achète successivement p tickets, choisis au hasard.
Le meneur de jeu dévoile ensuite p numéros perdants parmi les $n-p$ numéros restant qu'il retire de l'urne et propose au joueur deux stratégies:

- Ou bien, le joueur garde ses p numéros;

- Ou bien, le joueur échange ses tickets contre p nouveaux numéros, choisis au hasard parmi les $n-2p$ restant dans l'urne.

Le but de l'exercice est de déterminer laquelle des deux stratégies permet d'obtenir le plus de numéros gagnants.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note X_i (resp. Y_i) la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i-$ème numéro pioché (lors de la première phase de pioche) est gagnant et 0 sinon (resp. lors de la seconde phase de pioche, dans le cadre de la deuxième stratégie).

Enfin, on note A (resp. B) le nombre de numéros gagnants choisis avec la première stratégie (resp. avec la deuxième).

Partie I - Préliminaires

L'objectif de cette première partie est notamment l'obtention de la formule de Vandermonde $(*)$ ci-dessous afin de pouvoir légitimer la formule de la loi hypergéométrique qui suit et obtenir son espérance.

(1) Cette question vise à obtenir une formule pour le coefficient du monôme de degré k dans le développement du produit de deux fonctions polynomiales. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, on considère donc

$$P:\ t \mapsto \sum_{i=0}^{m} a_i t^i, \qquad Q:\ t \mapsto \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$$

et la fonction produit

$$R:\ t \mapsto \sum_{k=0}^{m+n} c_k t^k.$$

On décide avec les conventions $a_i = 0$ si $i > m$ et $b_j = 0$ si $j > n$ d'écrire

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m+n} a_i t^i, \quad \text{et} \quad Q(t) = \sum_{j=0}^{m+n} b_j t^j.$$

Expliquer pourquoi on a

$$c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r}.$$

(2) Soient m, n deux entiers naturels non nuls et $0 \leq p \leq m$ et $p \leq n$.

(a) En appliquant le résultat précédent à

$$P:\ t \mapsto (1+t)^m, \qquad Q:\ t \mapsto (1+t)^n \quad \text{et} \quad R:\ t \mapsto P(t)Q(t) = (1+t)^{m+n},$$

et en utilisant le principe d'identification, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p} \qquad (*)$$

(b) Retrouver cette formule avec un argument de dénombrement.

(3) On considère un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on définit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ par la formule, pour $k \in [\![0; p]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}}.$$

À l'aide de la formule $(*)$, vérifier que X définit bien une variable aléatoire. Une telle variable est dite *hypergéométrique* et on notera

$$X \hookrightarrow \mathcal{H}\left(p, \frac{p}{n}, n\right).$$

(4) (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

(b) En déduire, toujours à l'aide de $(*)$, que

$$E(X) = \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1}\binom{n-p}{p-1-(k-1)} = \frac{p^2}{n}.$$

Partie II - Simulation sous `SciLab`

Pour cette partie, on rappelle que la commande `grand(1,1,'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([\![a; b]\!])$. On rappelle également que la commande `length(U)` renvoie le nombre de composantes d'une liste U en argument.

(4) Dans le but de pouvoir simuler la deuxième stratégie, il est nécessaire de supprimer p mauvais tickets de l'urne. On aura besoin dans la suite pour cela du programme ci-dessous.

```
function S=retrait(p, U, L)
    N=length(U)
    for k=1:p
        j=grand(1,1,'uin', 1, N)
        while length(find(L==U(j)))==1
            j=grand(1,1,'uin',1, N)
        end
        U=[U(1:j-1), U(j+1:N)]
        N=N-1
    end
    S=U
endfunction
```

À quoi correspondent les arguments p, U et L?
Expliquer l'instruction `while length(find(L==U(j)))==1` puis détailler l'algorithme de cette fonction.

(5) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function [y, L]=selection(U)` qui, prenant en argument une liste de valeurs U renvoie un élement y sélectionné au hasard dans cette liste et la liste L obtenue à partir de la liste U en ayant supprimé l'élément sélectionné.

(6) Recopier et compléter la fonction suivante qui renvoie une simulation de A et de B en prenant en argument un nombre n total de tickets et une liste L de tickets gagnants.

```
function [A, B]=strategies(p, n, L)
    U=1:n
    Y=zeros(1,p)
    A=0
    for k=1:p
        [Y(k), U]=selection(U)
        A=A+length(find(L==Y(k)))
    end
    U=........
    B=0
    Z=zeros(1,p)
    for k=1:p
        .................
        .................
    end
endfunction
```

Partie III : Étude de cas particuliers avec $p = 1$ et $p = 2$

(7) Dans cette question et dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$ et $p = 1$.

   (a) Déterminer la loi de A.
   (b) Que vaut ici $P_{[X_1=0]}(Y_1 = 1)$? En déduire la loi de B.
   (c) Expliciter $E(A)$ et $E(B)$. Quelle stratégie semble alors la plus avantageuse?

(8) Dans cette question et dans cette question uniquement, on suppose $p = 2$ et $n \geq 6$.

   (a) Déterminer la loi de X_1.
   (b) Expliciter la loi conjointe de (X_1, X_2).
   (c) En déduire la loi marginale de X_2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?
   (d) Exprimer A en fonction de X_1 et X_2. En déduire la loi de A puis l'espérance de A.
   (e) Vérifier que $A \hookrightarrow \mathcal{H}(2, 2/n, n)$, où cette loi est celle de la Partie I.

   (f) Pour tout $k \in [\![0; 2]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de Y_1 sachant $A = k$.
   (g) En déduire que
$$Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{p - E(A)}{n - 2p}\right).$$
   (h) On admet que Y_2 suit la même loi que Y_1. Montrer alors que
$$E(B) = \frac{4(n-2)}{n(n-4)}.$$
   (i) Conclure.

Partie IV : Cas général

On admet dans cette partie que toutes les variables X_i suivent la même loi $\mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$ (pour $1 \leq i \leq p$).

(9) Vérifier que $E(A) = p^2/n$.

(10) Afin de déterminer la loi de A, on modélise l'expérience par un tirage simultané des p tickets dans l'urne qui en contient toujours n.
   (a) Quel est dans ce cas le nombre total de tirages possibles?
   (b) Combien de ces tirages contiennent k tickets gagnants?
   (c) En déduire que $A \hookrightarrow \mathcal{H}(p, p/n, n)$.

(11) On admet que, sachant $[A = k]$, toutes les variables Y_i suivent une même loi de Bernoulli. Préciser son paramètre en fonction de k.

(12) Montrer alors que, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$,

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} (p-k) \binom{p}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

(13) En déduire que

$$E(B) = \frac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}.$$

(14) Quelle est donc, en toute généralité, la stratégie qui en moyenne amène le plus de tickets gagnants?