ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°6 - Sujet B

Samedi 26 Mars
Durée : 4 heures

Exercice

Soient m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/M \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, on pose g^0=Id et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

(1) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ de l'endomorphisme f.
La matrice M est-elle inversible?

(2) (a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M.
(b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M.
(c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable?

(3) À l'aide des résultats de la Question (2b), indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

(4) On pose: $p = \dfrac{1}{3}(f + \mathrm{Id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id})$.

(a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.
(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q.
(c) Déterminer les deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait

$$M^n = a_n I + b_n M.$$

(d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Problème

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.

Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I - Loi à 1 paramètre

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(1) (a) Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites de $f_\lambda(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et lorsque $x \to +\infty$.
(c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

(2) (a) Vérifier que la fonction $x \longmapsto -e^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Établir la convergence et calculer la valeur de de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\mathrm{d}x$.
(c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

(3) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité.
On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose: $Y = \lambda\sqrt{X}$.

(a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.
(b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
(c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $E(Y^r)$.
(d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a: $E(Y^{r+1}) = (r+1)E(Y^r)$.
(e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $E(Y^r)$ et $E(X^r)$. En particulier, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

(4) Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un $n-$échantillon de X. Soient également (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 b_n = 0.$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$M_n = \min(X_1, .., X_n), \quad J_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}.$$

Montrer que la suite (J_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Partie II : Estimation ponctuelle de λ

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la Question 3.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1; n]\!]$

$$Y_k = \lambda\sqrt{X_k}, \qquad S_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$$

et g_k une densité de S_k.

(5) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.

On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T (ou f_Z) soit bornée, alors la variable aléatoire $T+Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y) f_Z(x-y) \mathrm{d}y.$$

(6) (a) En utilisant les propriétés admises, montrer que

$$g_2(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a:

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(7) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $1/S_n$ est une variable aléatoire à densité.
Pour quelles valeurs de n, l'espérance $E(1/S_n)$ et la variance $V(1/S_n)$ existent-elles? Calculer alors leurs valeurs respectives.

(8) On note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right).$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

(9) On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3

$$\lambda_n^* = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}.$$

(a) Que représente λ_0 pour λ_n^*?
(b) Construire à partir de λ_n^* un estimateur sans biais $\widehat{\lambda}_n$ de λ et calculer le risque quadratique $\rho(\widehat{\lambda}_n)$ de $\widehat{\lambda}_n$.
(c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \rho(\widehat{\lambda}_n)$. Commenter.

Partie III - Loi à 2 paramètres

(9) Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^\alpha), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit alors W une variable aléatoire, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda,\alpha)$.

(b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

(c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
(d) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function y=W(lambda, alpha)` permettant de simuler W.

(10) Soit K une variable aléatoire à densité, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K.

On pose pour tout x réel:

$$R(x) = -\ln(1 - F_K(x)), \qquad \text{et} \qquad r(x) = R'(x).$$

(a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés (i) et (ii) suivantes:
(i) La fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$;
(ii) La variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$;

(b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées.
Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclure.

Dans les Questions 11 et 12, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, w_2, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

(11) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x (\ln w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} - \frac{1}{x}.$$

(a) Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des réels quelconques.
En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n (z_k - y_k t)^2,$$

établir l'inégalité:

$$\left(\sum_{k=1}^n y_k z_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^n z_k^2\right).$$

(b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
(c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1; n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max_{1 \leq k \leq n}(w_k)$.
Montrer que: $1 \leq n_0 \leq n - 1$.
(d) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^n (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.
(e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(On distinguera les deux cas: $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$.)
(f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation

$$\varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln w_k)$$

admet une unique solution.

(12) On note $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la Question 9, dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.

Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod_{k=1}^n f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right).$$

(a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
(b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha})$.