Devoir surveillé n°2

Solution

Les questions précédées de (∗) sont réservées aux khubes.

Exercice 1

Cet exercice reprend une grande partie d'un exercice de **EDHEC 2000** mais s'inspire aussi du sujet zéro de **ECRICOME 2023**.

Dans tout l'exercice, on désigne par K la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et on introduit les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ MK = KM = M\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ {}^tM = M\}.$$

(1) **Étude de K.**

(a) Il est immédiat que $K^2 = I$. Ainsi, $K \cdot K = I$ donne que K est inversible et $K^{-1} = K$.

(b) (∗) La matrice K est symétrique, donc diagonalisable. De plus, $K^2 = I$ dans le calcul précédent nous donne un polynôme annulateur de K avec $X^2 - 1$ dont les racines sont 1 et -1. Si K n'admettait qu'une seule valeur propre, étant diagonalisable, elle serait déjà diagonale, donc K admet au moins deux valeurs propres et donc exactement 2

$$\mathrm{Sp}(K) = \{-1; 1\}.$$

Par contre, on ne peut pas sans calcul répondre à propos de la dimension des sous-espaces propres (et donc de la multiplicité de chaque valeur propre).

(c) Il faut résoudre.

- Pour $\lambda = 1$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff KX = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La famille formée des deux vecteurs ci-dessus est génératrice de E_1. De plus ces deux vecteurs sont (clairement) non colinéaires, ils en forment donc une base.

- Pour $\lambda = -1$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff KX = -X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ 2y & = & 0 \\ x+z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille formée du vecteur non nul ci-dessus est libre et génératrice de E_{-1}, elle en forme donc une base.

On a (sans surprise d'après la question précédente)

$$\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 3.$$

(2) (a) On montre que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel en montrant que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Il est clair que 0_3 est dans $\mathcal{E}$: $0_3 \cdot K = 0_3 = K \cdot 0_3$.
- Soient M et N deux matrices de $\mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux réels. Alors

$$(\lambda M + \mu N) \cdot K = \lambda MK + \mu NK = \lambda KM + \mu KN = K(\lambda M + \mu N) = \lambda M + \mu N$$

donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{E}$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire et non vide donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(/R)$ et donc un espace vectoriel.

On procède de la même manière pour $\mathcal{S}$.

- ${}^t0_3 = 0_3$ donc $0_3 \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est non vide.
- Soient $M, N \in \mathcal{S}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$${}^t(\lambda M + \mu N) = \lambda {}^tM + \mu {}^tN = \lambda M + \mu N$$

donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire. C'est lui aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

(b) Soit $M \in \mathcal{E}$. Supposons que M soit inversible, alors il existe une matrice inverse M^{-1}. Mais alors,

$$K = M^{-1} \cdot (MK) = M^{-1}M = I,$$

ce qui est absurde. Donc M n'est pas inversible.

(c) Considérons $M \in \mathcal{E}$ et montrons par récurrence que M^n est encore un élément de $\mathcal{E}$ pour tout $n \geq 1$.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 1$ il n'y a rien à faire, on a supposé $M \in \mathcal{E}$.

- <u>hérédité.</u> Supposons $M^n \in \mathcal{E}$ pour un certain $n \geq 1$. Alors, comme $M^n \in \mathcal{E}$, on a notamment $M^nK = K = kM^n$ et, en utilisant aussi que $M \in \mathcal{E}$,

$$M^{n+1}K = M \cdot M^nK = M \cdot K = K = K \cdot M = KM^n \cdot M = KM^{n+1}$$

donc M^{n+1} est dans $\mathcal{E}$ et la récurrence est terminée.

(d) On raisonne de la même manière pour cette question. Utilisant le fait que ${}^t(AB) =^t B^tA$. Supposons que $M \in \mathcal{S}$.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 1$ il n'y a rien à faire, on a supposé $M \in \mathcal{S}$.
- <u>hérédité.</u> Supposons $M^n \in \mathcal{S}$ pour un certain $n \geq 1$.

$${}^tM^{n+1} = {}^t(M \cdot M^n) = {}^t(M^n) \cdot {}^tM = M^n \cdot M = M^{n+1}$$

donc M^{n+1} est dans $\mathcal{S}$ et la récurrence est terminée.

(3) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. On a

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0_3 \iff \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \delta &= 0 \end{cases}$$

Donc la famille (A, B, C, D) est libre.

(4) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$. On revient à la définition de $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} &\iff MK = KM = M \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} k = g = c = a \\ h = b \\ f = d \end{cases} \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} \\
&\iff M = aA + bB + dC + eD
\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(A, B, C, D)$$

et la famille (A, B, C, D) est génératrice de $\mathcal{E}$ mais c'est aussi (d'après la question précédente) une famille libre. Ainsi, c'est une base de $\mathcal{E}$ qui est donc de dimension 4:

$$\dim(\mathcal{E}) = 4.$$

(5) On procède de la même manière.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \iff {}^tM = M \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & a \\ b & = & c \\ & \dots & \\ & \dots & \end{array} \right.$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & k \end{pmatrix}$$

$$\iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille formée des 6 matrices ci-dessus est donc génératrice de $\mathcal{S}$. On montre que c'est aussi une famille libre (le système qui découle de l'équation de liaison est trivial) et ainsi la famille forme une base de $\mathcal{S}$ et on peut conclure que

$$\dim(\mathcal{S}) = 6.$$

(6) On considère l'ensemble $\mathcal{K} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$.

(a) L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel. On en trouve une famille génératrice comme suit :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{K} &\iff M \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad M \in \mathcal{S} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tM = M \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = d \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & e & b \\ a & b & a \end{pmatrix} = aA + b(B+C) + eD \end{aligned}$$

et la famille $(A, B+C, D)$ est bien génératrice de $\mathcal{K}$. Cette famille étant libre (le système est encore immédiat), elle en forme une base.

(b) Soit $M \in \mathcal{K}$. D'après la Question (2c), $M^n \in \mathcal{E}$ et $M^n \in \mathcal{S}$ donc $M^n \in \mathcal{K}$. Les suites cherchées dont alors les suites des coordonnées de M^n dans la base $(A, B+C, D)$.

(7) On introduit alors la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) On observe que $T = 3A + 2D \in \mathcal{K}$ et les coordonnées dans la base $(A, B+C, D)$ sont alors $(3, 0, 2)$.

(b) On procède comme suggéré par récurrence.

- <u>initialisation</u>. Pour $n = 1$, la question précédente donne $x_1 = 3$ et $z_1 = 2$.
- <u>hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$T^n = x_n A + z_n D.$$

Alors

$$T^{n+1} = T \cdot T_n = (3A + 2D)(x_n A + z_n D) = 3x_n A^2 + 2z_n AD + 2x_n DA + 2z_n D^2.$$

Or, $D^2 = D$, $A^2 = 2A$ et $AD = DA = 0$. On obtient alors

$$T^{n+1} = 6x_n A + 2z_n D.$$

En posant $x_{n+1} = 6x_n$ et $z_{n+1} = 2z_n$, on a bien la propriété au rang $n+1$ et la récurrence est terminée.

(c) Les suites (x_n), de (z_n) sont géométriques de raisons respectives 6 et 2. D'après le cours, on déduit que

$$x_n = 6^{n-1}x_1 = 3 \cdot 6^{n-1}, \quad \text{et} \quad z_n = 2^{n-1}z_1 = 2^n.$$

Il suit que

$$T^n = 3 \times 6^{n-1}A + 2^n D = \begin{pmatrix} 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(8) **Une suite de matrices colonnes**

On introduit les matrices colonnes

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence, pour $n \geq 1$,

$$U_{n+1} = TU_n + V.$$

(a) On commence par expliciter la matrice $I - T$.

$$I - T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

puis on entame un Pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -10 & 0 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Donc $I - T$ est inversible et

$$(I - T)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) On résout

$$\begin{aligned} L = TL + V &\iff L - TL = V \\ &\iff (I - T)L = V \\ &\iff L = (I - T)^{-1}V \end{aligned}$$

Donc

$$L = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(c) La vérification ne pose pas de problème (tout ça nous rappelle les suites arithmético-géométriques, ou même le sujet **ECRICOME 2012**).

$$U_{n+1} - L = TU_n + V - (TL + V) = T(U_n - L).$$

Une récurrence super facile permet ensuite d'obtenir la formule souhaitée:

- initialisation. Pour $n = 1$, on a évidemment
$$U_1 - L = T^0(U_1 - L).$$
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$U_n - L = T^{n-1}(U_1 - L).$$
Alors, par ce qui précède
$$U_{n+1} - L = T(U_n - L) \underset{\text{H.R}}{=} T \cdot T^{n-1}(U_1 - L) = T^n(U_1 - L)$$
et la formule est vraie au rang $n + 1$ ce qui termine la récurrence.

(d) En combinant tout ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} U_n &= L + T^{n-1}(U_1 - L) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9\times 6^{n-2} & 0 & 9\times 6^{n-2} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 9\times 6^{n-2} & 0 & 9\times 6^{n-2} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9\times 6^{n-2} & 0 & 9\times 6^{n-2} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 9\times 6^{n-2} & 0 & 9\times 6^{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 + 9\times 6^n \\ 5 \\ -3 + 9\times 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2

Cet exercice est adapté de **EML 2014**.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}$.

Partie I - Étude de la fonction φ

(1) (a) On rappelle qu'au voisinage de 0, on a $e^u = 1 + u + o(u)$. En appliquant $u = 1/x \to 0$, $x \to +\infty$, on obtient

$$\varphi(x) = e^x - x\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e^x - x - 1 + o(1), \qquad x \to +\infty.$$

(b) Par croissance comparée, $x = o(e^x), x \to +\infty$ donc $f(x) \sim e^x, x \to +\infty$. En particulier, $\varphi(x) \to +\infty$, lorsque $x \to +\infty$ mais on peut aussi déduire de l'équivalent que la courbe de φ présente une branche parabolique de direction verticale en $+\infty$.

(c) Observant que $xe^{1/x} = e^{1/x}/(1 + x)$ est donc de la forme e^u/u avec $u = 1/x \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$, on a, par croissance comparée

$$\varphi(x) \sim -xe^{1/x} \longrightarrow -\infty, x \to 0^+.$$

L'axe des ordonnées est alors asymptote verticale à la courbe de φ en 0.

(2) Par différence de produit de composées de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est bien elle aussi de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On va donc dériver successivement trois fois la fonction φ, à l'aide des formules de dérivation. On commence par se retrousser les manches. C'est parti! Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= e^x - e^{1/x} - x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
&= e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{1/x}. \\
\varphi''(x) &= e^x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
&= e^x - \frac{1}{x^3} e^{1/x} \\
\varphi'''(x) &= e^x + \left(\frac{3}{x^4}\right) e^{1/x} + \left(-\frac{1}{x^3}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
&= e^x + \left(\frac{3x+1}{x^5}\right) e^{1/x},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue. Ouf!

(3) Le signe de $\varphi'''(x)$ ne pose aucune difficulté. Les exponentielles sont strictement positives et le quotient l'est aussi pour tout $x > 0$. Ainsi, φ'' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On voit que

$$\varphi''(1) = e - \frac{1}{1^3} e = 0.$$

On en déduit le signe de $\varphi''(x)$ que l'on présente dans le tableau suivant:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'''(x)$	‖		$+$		
φ''	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\varphi''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(4) Le signe de $\varphi''(x)$ nous donne les variations de φ'. On constate aussi que $\varphi'(1) = e$. Le tableau est alors le suivant:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
φ'	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, φ' admet e pour minimum sur $]0;+\infty[$, ou encore

$$\forall x > 0, \qquad \varphi'(x) \geq e.$$

(5) L'exécution du programme permet par exemple de voir que $15 < \varphi(3) < 16$. Pour montrer l'inégalité souhaitée, il faut (et il suffit) de montrer que $\varphi(x) - ex \geq 0$. Posons alors $\psi(x) =$

$\varphi(x) - ex$ qui, comme φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors,

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - e \geq 0$$

d'après la question précédente. Donc ψ est croissante sur $]0;+\infty[$ et en particulier sur $[3;+\infty[$. Son minimum sur $[3;+\infty[$ est alors atteint en $x = 3$. Plus précisément,

$$\forall x \geq 3, \quad \psi(x) \geq \psi(3) = \varphi(3) - 3e > 15 - 3e > 15 - 3 \times 3 > 0,$$

ce qui correspond bien à l'inégalité demandée.

(6) La Question (4) permet notamment de voir que $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

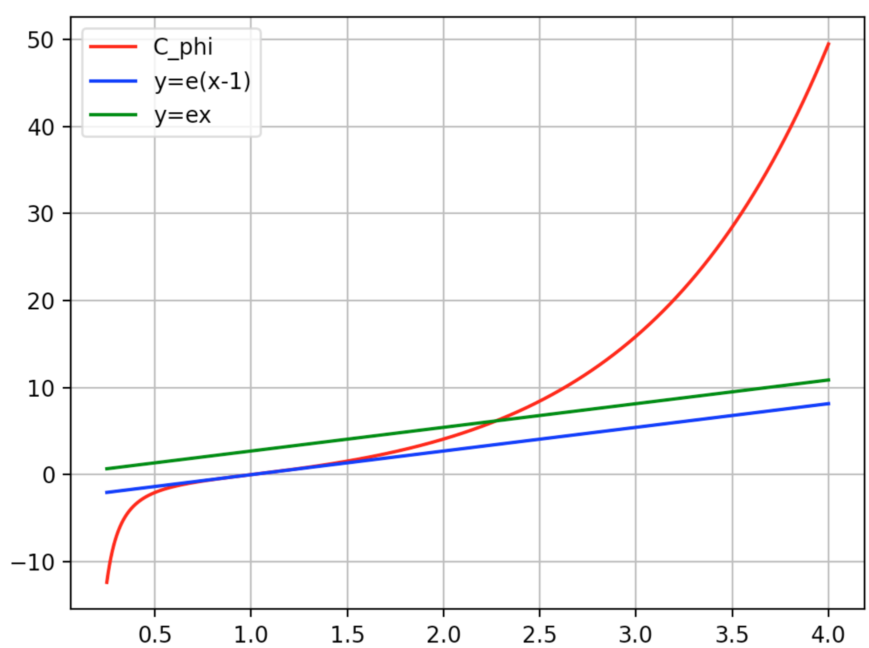
x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|\|$	$+$	
φ	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(7) La dérivée seconde de φ ne s'annule en changeant de signe qu'en $x = 1$. Ainsi, la courbe de φ admet un unique point d'inflexion, de coordonnées $(1, \varphi(1)) = (1, 0)$. La tangente à la courbe en ce point à pour équation

$$T_1 : \ y = \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) = e(x-1).$$

(8) Avec Python, on obtient la figure ci-contre

Affichage Python



Partie II - Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

(9) On procède par récurrence.

- initialisation. u_0 est naturellement bien défini et $u_0 = 3 \geq 3e^0$, donc la propriété est initialisée.

- hérédité. Supposons alors que, pour un certain $n \geq 0$, on ait u_n bien défini et $u_n \geq 3e^n$. En particulier $u_n > 0$ est dans l'ensemble de définition de φ et ainsi, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ existe. Mais de plus, par la Question (5),
$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq eu_n \geq e \times 3e^n = 3e^{n+1},$$
et la récurrence est ainsi terminée.

(10) On montre que la suite est croissante par récurrence. C'est à dire, on montre que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$.

- initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(3) \geq 3e$ par la Question (5). Or, $3e \geq 3$ donc $u_1 \geq u_0$.

- hérédité. Supposons alors que $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain $n \geq 0$. Mais, par croissance de la fonction φ, on a
$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi(u_{n+1}) = u_{n+2},$$
ce qui termine la récurrence.

(11) Comme $3e^n \to +\infty$, par comparaison, on peut affirmer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

(12) Sans difficulté, on calcule u_n (qu'on écrase successivement dans une variable `u`) tant que $u \leq A$.

```
def plus_petit_entier(A):
    u=3
    n=0
    while u<=A :
        n=n+1
        u=np.exp(u)-u*np*exp(1/u)
    return n
```

(13) (a) D'après ce qui précède,
$$0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
Or, la série géométrique de raison $(1/e)$ est convergente. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut assurer que la série $\sum(1/u_n)$ converge. On note S sa somme.

(b) On a
$$\begin{aligned} 0 \leq S - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= \frac{1}{3(e-1)e^n}. \end{aligned}$$

(c) On obtient alors une valeur approchée de S à `eps` près avec un la somme partielle de rang n dès que

$$\frac{1}{3(e-1)e^n} < \texttt{eps}.$$

On utilise une boucle `while`.

```
def valeur_approchée_S(eps):
    u=3
    S=1/u
    n=0
    while 1/(3*(np.exp(1)-1)*np.exp(n)) >= eps :
        n=n+1
        u=np.exp(u)-u*np*exp(1/u)
        S=S+1/u
    return S
```

Partie III - Étude d'une suite implicite

(14) D'après l'étude de φ dans la Partie I, φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise (d'après le théorème de bijection) une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ admet un unique antécédent sur $\mathbb{R}_+^*$ par φ noté v_n qui est donc l'unique solution de $\varphi(x) = n$.

Par définition, v_0 est la solution de $\varphi(x) = 0$. Or, $\varphi(1) = 0$ donc $v_0 = 1$.

(15) Le théorème de bijection nous dit aussi que la bijection réciproque φ^{-1} est également strictement croissante

x	$-\infty$		$+\infty$
φ^{-1}	0	$\nearrow$	$+\infty$

Or, $\varphi(v_n) = n \iff v_n = \varphi^{-1}(n)$. Comme $n < n+1$ et que φ^{-1} strictement croissante, on a

$$v_n = \varphi^{-1}(n) < \varphi^{-1}(n+1) = v_{n+1}$$

et la suite (v_n) est (strictement) croissante. De plus

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \varphi^{-1}(n) = +\infty.$$

(16) (a) Il est clair que $v_1 > 0$. De plus, on voit que $\varphi(2) > 1$ d'après la valeur approchée de $\varphi(2)$ renvoyée par Python dans la Partie I. Par stricte croissance de φ on a $v_1 < 1$. De la même manière, on voit, pour $n \geq 2$, que

$$\varphi(1) = 0 < n = \varphi(v_n) < \varphi(n) = e^n - ne^{1/n}$$

car $\varphi(n) > en > n$ pour $n \geq 3$ mais d'après une exécution Python précédente, $\varphi(2) > 2$ d'après la Partie I. Par stricte croissante de φ, on a l'encadrement souhaité.

(b) L'encadrement précédent nous dit où chercher la solution de $\varphi(x) = n$, selon la valeur de n. On distinguera donc dans le programme la valeur de la borne de droite dans l'intervalle selon que $n = 1$ ou $n \geq 2$. De plus, pour $n = 0$, on connait explicitement $u_0 = 1$, cas qu'on traite aussi séparément dans la fonction. Au final, on écrit le code suivant.

```
def suite_v(n):
    if n==0 :
        return 1
    a=1
    if n==1 :
        b=2
    else :
        b=n
    c=(a+b)/2
    while b-a>=10**(-3):
        if np.exp(c)-c*np.exp(1/x) > n :
            b=c
        else :
            a=c
        c=(a+b)/2
    return c
```

(c) Le programme a permis l'affichage des 100 premiers termes de la suite (v_n) mais aussi les 100 premiers termes de la suite $(\ln(n))$ qu'on constate trèèèèèèès proches pour n grand. On peut alors conjecturer que

$$v_n \sim \ln(n), \quad n \to +\infty.$$

(17) (a) Par définition de chaque terme la suite (v_n),

$$\begin{aligned}\varphi(v_n) = n \quad &\iff \quad e^{v_n} - v_n \exp\left(\frac{1}{v_n}\right) = n \\ &\iff \quad \frac{n}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right).\end{aligned}$$

(b) Comme $v_n \to +\infty$, $1/v_n \to 0$ et par croissance comparée, $e^{v_n}/v_n \to +\infty$ donc $v_n/e^{v_n} \to 0$. Il suit que

$$\frac{n}{e^{v_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

ou encore $e^{v_n} \sim n$, $n \to +\infty$.

(c) Le résultat ci-dessus se réécrit comme

$$e^{v_n} = n + o(n).$$

En prenant le log, on a

$$v_n = \ln(e^{v_n}) = \ln(n + o(n)) = \ln(n(1 + o(1)) = \ln(n) + \ln(1 + o(1)).$$

Or, $\ln(1 + o(1)) = o(1) = o(\ln(n))$ donc

$$v_n = \ln(n) + o(\ln(n))$$

et on peut affirmer que $v_n \sim \ln(n)$ comme conjecturé précédemment grâce à Python. La vie prend tout son sens.

Exercice 3

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2000**.

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k^{ième}$ lancer".
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie I - Simulation informatique et conjectures

(1) La liste `T` de ce programme contient n réalisations d'une Bernoulli de paramètre p qui représente donc les n lancers de la pièce, un 1 représentant alors l'obtention d'un *Pile*. On va donc parcourir tous les termes de la liste et regarder s'ils sont différents ou non du terme d'avant, augmentant le compteur `chgt` si c'est le cas.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n, p):
    chgt= 0
    T=[rd.binomial(1, p) for k in range(n)]
    for k in range(1, n):
        if T[k] != T[k-1] :
            chgt=chgt+1
    return chgt
```

(2) La liste `L` contient 1000 simulation de X_n pour $p = 1/2$. La liste M contient 1000 simulations d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, 1/2)$. Pour les différentes valeurs de n testées, les hauteurs des bâtons de l'histogramme semblent être les mêmes, on peut donc conjecturer **dans le cas particulier** $p = q = 1/2$, que

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 1/2).$$

Partie II - Étude de quelques exemples

(4) (a) X_2 compte le nombre de changement après deux lancers. On comprend alors qu'après deux lancers, on a pu avoir ou bien deux fois la même face (et donc aucun changement), ou bien deux faces différentes (et donc un changement). Ainsi, $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$ et X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$P(X_2 = 1) = P(P_1 \cap F_2 \cup F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = pq + qp = 2pq,$$

où le calcul s'appuie sur le fait que les deux alternatives ci-dessus sont disjointes et les lancers indépendants. On a alors

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq).$$

Le cours permet d'affirmer directement que

$$E(X_2) = 2pq, \qquad V(X_2) = 2pq(1 - 2pq).$$

(b) Avec 3 lancers, on peut avoir aucun changement (toujours la même face de la pièce), un changement ou au plus deux changements. Donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cup P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(P_1)P(P_2)P(P_3) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= q^3 + p^3 \end{aligned}$$

Si on a deux changement, on change de face de la pièce à chaque lancer.

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(P_2)P(F_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= qpq + pqp = pq(q+p) = pq \qquad (\text{car } p + q = 1) \end{aligned}$$

On en déduit

$$P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = 1 - pq - q^3 - p^3.$$

(c) La loi de X_3 est *finie*, elle admet espérance et variance. Pour simplifier les calculs, il est bon d'avoir en tête les relations suivantes

$$(p+q) = 1, \qquad 1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2, \qquad 1 = (p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3.$$

On calcule

$$\begin{aligned} E(X_3) &= 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) \\ &= 1 - pq - q^3 - p^3 + 2pq \\ &= 1 + pq - q^3 - p^3 = 3p^2q + 3q^2p + pq \\ &= pq(3p + 3q + 1) = pq(3p + 3q + p + q) = pq(4p + 4q) = 4pq(p+q) \\ &= 4pq, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Ouf! Laborieux. Il y avait sans doute un chemin un peu plus court vers ce résultat... Pour la variance, afin d'utiliser König-Huyguens, on calcule l'espérance de X_3^2. C'est parti.

$$\begin{aligned} E(X_3^2) &= 0^2 \times P(X_3 = 0) + 1^2 \times P(X_3 = 1) + 2^2 \times P(X_3 = 2) \\ &= 1 - pq - q^3 - p^3 + 4pq \\ &= 3q^2p + 3p^2q + 3pq = 3pq(q + p + 1) \\ &= 6pq \end{aligned}$$

ce qui donne

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq).$$

(5) (a) Avec le même raisonnement que précédemment, en 4 lancers, on peut avoir entre 0 et 3 changements donc $X_4(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Comme précédemment, les deux cas extremaux sont les plus faciles à exprimer et obtenir. On a

$$\begin{aligned} P(X_4 = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cup P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3)P(F_4) + P(P_1)P(P_2)P(P_3)P(P_4) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= q^4 + p^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X_4=3) &= P(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4\cup P_1\cap F_2\cap P_3\cap F_4)\\
&= P(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4)+P(P_1\cap F_2\cap P_3\cap F_4) \qquad \text{(par incompatibilité)}\\
&= P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4)+P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4) \qquad \text{(par indépendance des lancers)}\\
&= qpqp+pqpq\\
&= 2p^2q^2
\end{aligned}$$

Pour avoir un seul changement, il y a de nombreux cas. On a donc une première série de *Pile* (de longueur de 1 à 3) suivie d'une série de *Face*, ou l'inverse.

$$\begin{aligned}
(X_4=1) &= (P_1\cap F_2\cap F_3\cap F_4)\cup(P_1\cap P_2\cap F_3\cap F_4)\cup(P_1\cap P_2\cap P_3\cap F_4)\\
&\quad \cup(F_1\cap P_2\cap P_3\cap P_4)\cup(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)\cup(F_1\cap F_2\cap F_3\cap P_4).
\end{aligned}$$

Le calcul des probabilités, avec les mêmes arguments que précédemment, donne

$$\begin{aligned}
P(X_4=1) &= pq^3+p^2q^2+p^3q+qp^3+q^2p^2+q^3p\\
&= 2pq(q+pq+p)\\
&= 2pq(1+pq)
\end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned}
P(X_4=2) &= 1-q^4-p^4-2pq(1+pq)-2p^2q^2\\
&= 1-q^4-p^4-2pq
\end{aligned}$$

Ces calculs sont quand même un peu lourds...

(b) On remonte ses manches et on y va.

$$\begin{aligned}
E(X^4) &= 2pq(1+pq)+2\left(1-q^4-p^4-2pq\right)+3\left(2p^2q^2\right)\\
&= 2pq+2p^2q^2+2pq-2pq(p^4+q^4)-4pq+6p^2q^2\\
&= 8p^2q^2-2pq(p^4+q^4)\\
&= 2pq(4pq-p^4-q^4)
\end{aligned}$$

Partie III : Étude du cas où $p\neq q$

Dans toute cette partie, et dans cette partie uniquement, on suppose que $p\neq q$ (en particulier $p\neq 1/2$ et $q\neq 1/2$).

(7) Soit $n\geq 2$. Si on a aucun changement on a eu ou bien n *Pile* consécutifs ou bien n *Face* consécutifs. On peut alors écrire

$$(X_n=0)=\left(\bigcap_{k=1}^{n}P_k\right)\cup\left(\bigcap_{k=1}^{n}F_k\right).$$

Par incompatibilité puis par indépendance des lancers, on obtient (ce qui généralise les calculs précédents)

$$P(X_n=0)=p^n+q^n.$$

(8) (a) Une petite formule classique, souvent donnée comme illustration des sommes télescopiques.

$$\begin{aligned}
(b-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1}a^kb^{m-1-k}\right) &= \left(\sum_{k=0}^{m-1}a^kb^{m-k}\right)-\left(\sum_{k=0}^{m-1}a^{k+1}b^{m-1-k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\left(a^kb^{m-k}-a^{k+1}b^{m-(k+1)}\right)\\
&= a^0b^m-a^{m-1+1}b^{m-(m-1+1)} \qquad \text{(par télescopage)}\\
&= b^m-a^m,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Cette question est plus difficile; il suffit de voir ce qu'on a du faire pour $(X_4 = 1)$ qu'il faut maintenant généraliser. C'est à dire qu'on a une première série (de *Pile* ou de *Face*) de longueur entre 1 et $n-1$ et une deuxième série avec l'autre face de la pièce. Ceci s'écrit

$$(X_n = 1) = \bigcup_{j=1}^{n-1} \left(\left[\left(\bigcap_{k=1}^{j} P_k \right) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} F_k \right] \cup \left[\left(\bigcap_{k=1}^{j} F_k \right) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} P_k \right] \right)$$

La première réunion représente les longueurs possibles de la première série de mêmes faces obtenues. Par incompatibilité puis par indépendance,

$$\begin{aligned}
P(X_n = 1) &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(p^j q^{n-j} + q^j p^{n-j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} p^j q^{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} q^j p^{n-j} \\
&= q^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{p}{q} \right)^j + p^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{q}{p} \right)^j \\
&= q^n \times \frac{p}{q} \times \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1 - \frac{p}{q}} + p^n \times \frac{q}{p} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1 - \frac{q}{p}} \\
&= q^n \times \frac{p}{q} \times \frac{q}{q-p} \times \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \right) + p^n \times \frac{q}{p} \times \frac{p}{p-q} \times \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} \right) \\
&= \frac{pq}{q-p} \left(q^{n-1} \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \right) - p^{n-1} \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} \right) \right) \\
&= \frac{pq}{q-p} \left(q^{n-1} - p^{n-1} - p^{n-1} + q^{n-1} \right) \\
&= \frac{2pq}{q-p} \left(q^{n-1} - p^{n-1} \right),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait et qu'on est bien content d'avoir obtenu, non sans effort. C'est une vraie question difficile et calculatoire comme il y en a de temps en temps.

(9) S'il y a $n-1$ changements en n tirages, c'est qu'on change de face de la pièce à chaque lancer.

- Si n est **pair**, il y a autant de *Pile* que de *Face*. En écrivant $n = 2m$,

$$(X_n = n-1) = \left[\bigcap_{j=1}^{m} (P_{2j-1} \cap F_{2j}) \right] \cup \left[\bigcap_{j=1}^{m} (F_{2j-1} \cap P_{2j}) \right]$$

et le calcul donne

$$\begin{aligned}
P(X_n = n-1) &= \prod_{j=1}^{m} pq + \prod_{j=1}^{m} qp \\
&= p^m q^m + q^m p^m = 2p^m q^m = 2(pq)^m \\
&= 2(pq)^{n/2} = 2\left((pq)^{1/2}\right)^n \\
&= 2\left(\sqrt{pq}\right)^n
\end{aligned}$$

- Si n est **impair**, la face par laquelle on commence est présente une fois de plus. Notant $n = 2m+1$, on a

$$(X_n = n-1) = \left(\left[\bigcap_{j=1}^{m} (P_{2j-1} \cap F_{2j})\right] \cap P_{2m+1}\right) \cup \left(\left[\bigcap_{j=1}^{m} (F_{2j-1} \cap P_{2j})\right] \cap F_{2m+1}\right)$$

Il suit que

$$\begin{aligned} P(X_n = n-1) &= \left(\prod_{j=1}^{m} pq\right) p + \left(\prod_{j=1}^{m} qp\right) q \\ &= p^m q^m p + q^m p^m q = p^m q^m (p+q) = (pq)^m \\ &= (pq)^{(n-1)/2} = \left((pq)^{1/2}\right)^{n-1} \\ &= (\sqrt{pq})^{n-1} \end{aligned}$$

(10) - $n = 3$ (impair). Les résultats des trois dernières questions donnent

$$P(X_3 = 0) = p^n + q^n = p^3 + q^3, \qquad P(X_3 = 2) = (pq)^{\frac{n-1}{2}} = pq,$$

$$P(X_3 = 1) = 2pq\frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q-p} = 2pq\frac{q^2 - p^2}{q-p} = 2pq(q+p) = 2pq,$$

et il s'agit bien des valeurs trouvées dans la Partie I.

- $n = 4$ (pair).

$$P(X_4 = 0) = p^n + q^n = p^4 + q^4, \qquad P(X_4 = 3) = 2(pq)^4,$$

On peut utiliser la factorisation de la Question ($8a$) pour factoriser $q^3 - p^3$

$$\begin{aligned} P(X_4 = 1) &= \frac{2pq(q^3 - p^3)}{q-p} \\ &= \frac{2pq(q-p)(q^2 + qp + p^2)}{q-p} = 2pq(q^2 + qp + p^2) \\ &= 2pq(q^2 + 2pq + p^2 - pq) = 2pq((q+p)^2 - pq) = 2pq(1-pq). \end{aligned}$$

Il s'agit encore bien des 3 valeurs trouvées dans la Partie I.

(11) (a) Il faut utiliser la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{P_{k-1},\ F_{k-1}\}$. On a alors

$$\begin{aligned} P(Z_k = 1) &= P_{P_{k-1}}(Z_k = 1)P(P_{k-1}) + P_{F_{k-1}}(Z_k = 1)P(F_{k-1}) \\ &= P_{P_{k-1}}(F_k)P(P_{k-1}) + P_{F_{k-1}}(P_k)P(F_{k-1}) \\ &= P(F_k)P(P_{k-1}) + P(P_k)P(F_{k-1}) = qp + pq \\ &= 2pq, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

(b) On compte le nombre de changements, il faut donc additionner les variables Z_j. On a clairement

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k.$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(Z_k) = \sum_{k=1}^{n} (2pq) = 2npq.$$

Partie IV : Étude du cas où $p = q$

Dans cette dernière section, on suppose que $p = q = 1/2$.

(12) Pour $p = q = 1/2$, les lois obtenues pour X_3 et X_4 sont bien celles des lois binomiales de paramètres respectifs $\mathcal{B}(2, 1/2)$ et $\mathcal{B}(3, 1/2)$. En effet

$$\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

et

$$\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right).$$

On omet la vérification pour X_4.

(13) Procédons par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 2$, on a déjà mentionné que X_2 suivait une Bernoulli de paramètre $2pq = 1/2$. C'est bien une binomiale de paramètre $n - 1$ et $1/2$.

- <u>hérédité.</u> On suppose que, pour un certain $n \geq 2$, $X_n \hookrightarrow B(n-1, 1/2)$. Il est alors capital d'observer qu'entre le $n-$ième lancer et le $(n+1)-$ième lancer, le nombre de changements peut rester le même ou bien augmenter de 1, ce qui se traduit par

$$P_{X_n=j}(X_{n+1} = k) = 0, \qquad \text{si} \quad j \notin \{k, k-1\}.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On doit traiter le cas $k = 0$ à part car cela veut dire qu'on reste à 0 changements, mais on a déjà une formule

$$P(X_{n+1} = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour $k \geq 1$, par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X_n = j] \ j \in [\![0, n-1]\!]\}$,

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = k) &= \sum_{j=0}^{n-1} P_{X_n=j}(X_{n+1} = k)P(X_n = j) \\
&= P_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k)P(X_n = k-1) + P_{X_n=k}(X_{n+1} = k)P(X_n = k) \\
&= P(S_{n+1} = 1)P(X_n = k-1) + P(S_{n+1} = 0)P(X_n = k) \\
&= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{n}{k}, \qquad \text{(par triangle de Pascal)} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

C'était franchement difficile.

Plus simplement, il est raisonnable de penser qu'on aurait pu fournir un argument du type "à chaque lancer, la probabilité de changer est de 1/2 - peu importe le résultat obtenu au lancer

précédent. Compter le nombre de changements revient donc à compter, à partir du deuxième lancer, le nombre de succès (où succès=changement) pour les $n-1$ lancers restants. C'est donc bien une binomiale de paramètre $n-1$ et $1/2$.
Le résultat est exactement celui conjecturé grâce aux figures obtenues à la Partie I avec Python.