EML 2023

EXERCICE 1

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. ***a)*** Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. *Informatique.*

a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while ...... :
        u = exp(-u)/u
        n=....
    return n
```

b) On considère maintenant la fonction **Python** :

```
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u>a :
        u = exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les appel `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
Commenter ce résultat en une ligne.

c) Écrire une fonction **Python** qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2$.

a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α.

c) Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $e \simeq 2,7$.

4. ***a)*** Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question ***3.b)***.

d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

EXERCICE 2

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Partie I - Réduction de la matrice A

1. a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?

b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

c) Donner une base de E_2.

d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

2. a) Dans cette sous-question M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?

b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

3. Donner une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & 3x & + & y & + & z \\ y' & = & x & + & 3y & + & z \\ z' & = & x & + & y & + & 3z \end{array} \right.$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).

5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & - & 4y \\ y' & = & x & + & 3y \end{array} \right.$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

EXERCICE 3

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n :

$$[\![1, n]\!] = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

c) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h.

2. Pour tout x dans $[0, 1]$ on pose $g(x) = -h(x) - h(1 - x)$.
Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **l'entropie** de X est, sous réserve d'existence :

$$H(X) = -\sum_{x \in X(\Omega)} h(\mathbb{P}([X = x]))$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i)$$

où, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$.

3. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer $H(U)$.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Démontrer que $H(X) \leqslant \ln(2)$ avec égalité si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$. On pourra utiliser la question ***2***.

5. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2, définies sur le même espace probabilisé.

Soit Z la variable aléatoire telle que :

- $Z(\Omega) = \{0, 1\}$
- l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.

On définit le réel p par : $p = \mathbb{P}([Z = 1])$.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?

b) Démontrer que $p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$.

c) Vérifier que $1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$.

6. Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que :

- $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$
- l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - 2\mathbb{P}([Z_n = 1]) = (1 - 2p)^n$ (*on pourra raisonner par récurrence*).

c) Démontrer que $H(Z_n) \leqslant \ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Partie III - Des variables à densité

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de densité f, on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\, dt$ converge absolument ; **l'entropie** de X est alors :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\, dt$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.

a) Démontrer que U admet une entropie.

b) Déterminer $H(U)$.

8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f.

a) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t f(t)\, dt$ et déterminer sa valeur.

b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln(\lambda)$.

9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X.

a) Donner l'espérance et la variance de X. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\, dt$.

b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \dfrac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.