**PSI 2022-2023**

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Paul Valéry, Paris 12ème.

# Planche de khôlles n°1

*Semaine du 10/10*

## Question de cours

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0$. Il suit que $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ car $f$ est linéaire. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ et on a bien l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. Alors, il existe un $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$ et en particulier $y = f(f(x)) = f(z)$ avec $z = f(x)$. Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$ et on a bien l'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

## Exercice 1

Non disponible.

**PSI 2022-2023**

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

# Planche de khôlles n°2

*Semaine du 10/10*

## Question de cours

On calcule :

$$\begin{aligned}(i)\ \int_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} &= [\ln(\ln(t))]_2^4 = \ln(\ln(4)) - \ln(\ln(2)) \\ &= \ln\left(\frac{\ln(4)}{\ln(2)}\right) \\ &= \ln(2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(iii)\ \int_0^2 3^t \mathrm{d}t &= \int_0^2 e^{\ln(3)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{\ln(3)t}}{\ln(3)}\right]_0^2 = \left[\frac{3^t}{\ln(3)}\right]_0^2 \\ &= \frac{3^2 - 3^0}{\ln(3)} \\ &= \frac{8}{\ln(3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\sqrt{2}t)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(u)\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2})}{2},\end{aligned}$$

où le changement de variable $u = u(t) = \sqrt{2}t$ est affine donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc licite et donne $\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}t = \sqrt{2}\mathrm{d}t$.

## Exercice 1

On considère un hyperplan $H$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(A_1, ...., A_p)$ une base de $H$ et $I_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but est de montrer que $H$ contient au moins une matrice inversible.

☞ *On suppose donc que $H$ ne contient aucune matrice inversible.*

(1) Commençons par montrer que la somme est directe. Soit $M \in H \cap \mathbb{R}I_n$. Comme $M \in \mathbb{R}I_n$ alors $M = \lambda I_n$. Or $M \in H$ donc $M$ n'est pas inversible et nécessairement $\lambda = 0$ donc $M = 0$.
Il suit que $\dim(H \oplus \mathbb{R}I_n) = \dim(H) + \dim(\mathbb{R}I_n) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, on a bien $H \oplus \mathbb{R}I_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Soit $N$ une matrice nilpotente, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $N - \lambda I$ non inversible.

(i) Si $N - \lambda I$ n'est pas inversible alors $\mathrm{Ker}(N - \lambda I) \neq \{0\}$ et on peut trouver $u \neq 0$ tel que $u \in \mathrm{Ker}(N - \lambda I)$ ce qui donne $Nu = \lambda u$.

(ii) En appliquant successivement $N$ à $u$ $k$ fois on obtient (par une récurrence immédiate) $N^k u = \lambda^k u$. Or $N^k = 0$ donc $\lambda^k u = 0$ mais $u \neq 0$ donc $\lambda^k = 0$ ce qui implique nécessairement $\lambda = 0$.

(b) Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R}I_n$, on peut décomposer $N$ : il existe $B \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$N = B + \lambda I$$

mais alors $B = N - \lambda I \in H$ donc $N - \lambda I$ non inversible car $H$ ne contient aucune matrice inversible. D'après ce qui précède, il suit que $\lambda = 0$.

(c) Si $\lambda = 0$, alors $N = B \in H$. Ainsi $N \in H$ et le raisonnement étant valable pour une matrice nilpotente $N$ quelconque, $H$ contient toutes les matrices nilpotentes.

(3) On va décomposer une matrice inversible en somme de deux matrices nilpotentes. Comme $H$ contient toutes les matrices nilpotentes, $H$ contient ces deux là et par stabilité contient leur somme donc la matrice inversible menant à une contraction.
Considérons la matrice $A$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$A$ est inversible car ses colonnes sont une permutation des vecteurs de la base canonique. Mais on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices ci-dessus sont clairement nilpotentes, fournissant la contradiction souhaitée.

**PSI 2022-2023**

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Paul Valéry, Paris 12ème.

# Planche de khôlles n°3

*Semaine du 10/10*

## Question de cours

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$. Alors

$$f \text{ injective } \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\}.$$

En effet, supposons que $f$ soit injective, alors si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(0) = 0$ ($f$ est linéaire). Par injectivité, on a nécessairement $x = 0$. Comme naturellement $0 \in \mathrm{Ker}(f)$, on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de $f$, on a $f(x - y) = 0$ donc $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$. Or, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc $x - y = 0$ ou encore $x = y$ et $f$ est bien injective.

## Exercice 1

On considère l'application $\varphi$ qui, à toute polynôme $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme, notée $\varphi(P)$, définie par:

$$(\varphi(P))(X) = \int_0^1 P(X+t)\mathrm{d}t$$

(1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P$ et $Q$ deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha P + Q)(X) &= \int_0^1 (\alpha P + Q)(X+t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (\alpha P(X+t) + Q(X+t))\mathrm{d}t \\
&= \alpha \int_0^1 P(X+t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(X+t)\mathrm{d}t \\
&= \alpha\varphi(P) + \varphi(Q),
\end{aligned}$$

et $\varphi$ est bien linéaire. Pour montrer que $\varphi$ est un endomorphisme il faut montrer que $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Pour ce faire, on commence par calculer les images des vecteurs de la base

canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, notée ici $(e_0, e_1, e_2)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(e_0)(X) &= \int_0^1 e_0(X+t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1 \\
\varphi(e_1)(X) &= \int_0^1 e_1(X+t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (X+t)\mathrm{d}t = \left[Xt + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= X + \frac{1}{2} \\
\varphi(e_2)(X) &= \int_0^1 e_2(X+t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (X+t)^2 dt = \left[X^2 t + Xt^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= X^2 + X + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Par conséquent: $\varphi(e_0) = e_0$, $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1$ et $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2$.
Soit alors $P = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. La linéarité de $\varphi$ permet de voir que

$$\varphi(P) = \alpha\varphi(e_0) + \beta\varphi(e_1) + \gamma\varphi(e_2).$$

Or, par stabilité de $\mathbb{R}_2[X]$ par combinaison linéaire et comme chaque image est élément de $\mathbb{R}_2[X]$, on a bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi$ est bien un endomorphisme.

(2) (a) D'après ce qui précède, on a directement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice $A$ est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible et l'endomorphisme qu'elle représente, $\varphi$, bijectif. Ainsi, $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et son noyau est réduit au vecteur nul.

(3) (a) Montrons donc par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, il existe un réel $u_n$ tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- <u>initialisation</u>. Pour $n = 0$, il suffit de poser $u_0 = 0$ pour que $A^0 = I$ ait la forme souhaitée.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \cdot A^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & \frac{1}{3} + \frac{n}{2} + u_n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{n}{2} + u_n,$$

pour que la propriété au rang $n+1$ soit vraie. La récurrence est terminée.

(b) On somme, en utilisant un télescopage,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} + \frac{k}{2} \right) \\ &= \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{n}{3} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n(3n-1)}{6} \end{aligned}$$

(c) D'après ce qui précède,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n(3n-1)}{6} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$