F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°2

Mercredi 19 Mai
Durée : 4 heures

Une grande importance sera apportée à la présentation, la lisibilité, les efforts de rédaction et la clarté des résultats exposés que l'on demande d'encadrer. Toute copie qui ressemble à un brouillon ne sera pas lue.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer $A^2 - 7A$.
- (b) La matrice A est-elle inversible ?
- (c) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique. Justifier que f est un automorphisme.
- (d) On note $u_1 = (1, 1, 0)$. Calculer $f(u_1)$. En déduire que $u_1 \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$.
- (e) Déterminer un vecteur u_2 de $\mathbb{R}^3$ de sorte que (u_1, u_2) forme une base de $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$.
- (f) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ de sorte que (u_3) forme une base de $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$. Que vaut, sans calcul supplémentaire $f(u_3)$?

(2) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$g(e_1) = e_1 - 3e_2 - e_3, \qquad g(e_2) = -g(e_1), \qquad g(e_3) = -e_1 - 3e_2 + e_3.$$

- (a) Expliciter la matrice B de g dans la base canonique $\mathcal{B}$.
- (b) Quel est le rang de g?
- (c) Calculer $g(u_1)$. En déduire sans calcul supplémentaire une base du noyau de g.
- (d) On note $v = e_1 - e_2 - e_3$. Calculer $g(v)$ en fonction de v.

(3) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u_1, v)$.

(4) Montrer que $\mathcal{C} = (v, u_1, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(5) On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de v, u_1, u_3 (dans la base canonique). Expliciter P et justifier qu'elle est inversible.

(6) Expliciter les matrices D_1 et D_2 de f et g dans la base $\mathcal{C}$.

(7) Vérifier que $A = PD_1P^{-1}$ et $B = PD_2P^{-1}$.

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n :

$$X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n.$$

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1}X_n.$$

(8) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \frac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \frac{1}{6} D_2 Y_n.$$

(9) Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\, a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\, a_n \\[2ex] b_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\, b_{n+1} \\[2ex] c_{n+2} & = \dfrac{2}{3}\, c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\, c_n \end{cases}$$

(10) Expliciter, à l'aide d'un pivot de Gauss, la matrice P^{-1}.
Calculer ensuite les matrices Y_0 et Y_1.

(11) Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

(12) En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{4}{3}.$$

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste après le $k-$ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$.

On introduit aussi, pour $i \in \mathbb{N}^*$, les évènements B_i (resp. N_i) correspondant à l'obtention d'une boule blanche (resp. noire) lors du $i-$ème tirage.

(1) Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance. (*On pourra utiliser les évènements B_1 et N_1 pour rédiger la réponse.*)

(2) (a) Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$

(b) En déduire la valeur de $E(X_2)$.

(3) Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

(4) Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. En distinguant trois cas, déterminer

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]).$$

(5) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}\, \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\, \mathbb{P}([X_k = i-1]) \qquad (*)$$

(6) À l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3.

(7) (a) Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que

$$\mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

(b) Montrer de même que
$$\mathbb{P}\left([X_k = k+1]\right) = \frac{1}{(k+1)!}.$$
(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right)$.
Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
Montrer que la suite (b_k) définie, pour $k \in \mathbb{N}$, par $b_k = a_k + k + 2$, est géométrique.
En déduire alors que :
$$\forall k \in \ \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

(8) (a) À l'aide de la formule (*), montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ E\left(X_{k+1}\right) = \frac{k+1}{k+2} E\left(X_k\right) + 1$$
(b) Déduire de ce qui précède que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ E\left(X_k\right) = \frac{k+2}{2}$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2};$$
- La fonction F définie sur $]-1;+\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t;$$
- La fonction g définie sur $[-1;+\infty[$ par
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x+1)}, & \text{si } x \notin \{0;-1\} \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x = -1 \end{cases}$$
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

(2) Déterminer les variations de f, présentées sous forme d'un tableau.

(3) Justifier que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > -1$ et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
(4) À l'aide du changement de variable $u = t+1$, montrer que, pour tout $x > -1$,
$$F(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$
(5) Déterminer les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.

(6) (a) Étudier la concavité de F. On montrera notamment que F admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
(b) Montrer que, pour tout $x > -1$ non nul, $F(x) > 0$.

(7) Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $1/(1+x)$. En déduire le développement limité de $F(x)$ à l'ordre 2 en 0.

(8) Préciser l'équation de la tangente à la courbe de F en 0 et leurs positions relatives.

(9) Représenter l'allure de la courbe représentative de F ainsi que, sur le même graphique, la tangente en 0.

(10) Calculer u_1 et u_2.

(11) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
(12) En déduire la convergence de (u_n) vers une limite à préciser.