Math 1NSD2. 2023-2024

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 1.

Exercice 1

1. Question de cours. Coefficients binomiaux : définition, propriétés. Interprétation ensembliste. Formule du triangle de Pascal.

On tire une main de 5 cartes d'un paquet de 32 cartes. On considère alors les évènements A et B suivants :

$$A = \text{"L'as de pique est dans la main"} \text{ et } B = \text{"Au moins un as est dans la main"}$$

2. a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A)$.

b. Sachant que $\dfrac{27 \times 26 \times 25 \times 24}{32 \times 31 \times 30 \times 29} < \dfrac{1}{2}$, montrer que : $\mathbb{P}(B) > 2\mathbb{P}(A)$.

On note maintenant X la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main de cinq cartes, Y la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main contenant l'as de pique, Z la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main contenant au moins un as.

3. a. Pour $k = 2, k = 3$ et $k = 4$, comparer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_A(X = k)$ et $\mathbb{P}_B(X = k)$.
b. En déduire que $\mathbb{E}(Y) > \mathbb{E}(Z)$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par

$$u_0 > 2, \qquad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

1. Quelles sont les limites possibles de cette suite ?

2. Quel est son sens de variation ?

3. Que dire de sa limite ?

Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 2.

Exercice 1

1. Question de cours. Définition d'un endomorphisme. Définition du noyau et de l'image. Théorème du rang.

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note respectivement f (resp. φ) les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés dans la base canonique par A (resp. B).

2. Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^3$ tels que :
- u forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$;
- $Av = -v$;
- $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(w)$

3. Vérifier que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$. Former la matrice P de passage de la base canonique vers cette nouvelle base.

4. Déterminer P^{-1}.

5. Vérifier que $P^{-1}AP = D$. Est-ce surprenant? Expliquer.

6. Montrer que la matrice de φ dans la base (u, v, w) est encore une matrice diagonale, que l'on notera C. Expliciter un lien ente C et B.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Une urne contient une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, trois boules numérotées 3 et ainsi de suite jusqu'à n boules numérotées n. On pioche une boule au hasard dans cette urne et on note X le numéro de la boule piochée.

1. Combien y a-t-il de boules dans l'urne?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Montrer que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(n-1)(n+2)}{18}$.

Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 3.

Exercice 1

1. Question de cours. Définition d'un système complet d'évènements. Formule des probabilités totales.

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$. Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de *Pile* ou *Face* dont les règles sont les suivantes:

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième *Pile*. On note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *Face* alors obtenus;

- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant *Pile* avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un *Pile*. On note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *Face* alors obtenus;

- Le joueur A gagne si son nombre de *Face* obtenus est inférieur ou égal à celui de B; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

2. a. Décrire les évènements $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$ puis calculer leurs probabilités.

b. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X=n) = (n+1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

c. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad P(Y \geq n) = (1-p)^n$.

4. a. Montrer que

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geq n).$$

b. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

Exercice 2

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{-2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 4.

Exercice 1

1. Question de cours. Matrice représentative d'une application linéaire. Lien entre les propriétés d'une matrice et de l'application linéaire.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère un vecteur v **fixé** de $\mathbb{R}^3$.
On considère également l'application f qui à tout vecteur $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f(u)$ défini par :

$$f(u) = u - (a + b + c)v.$$

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Dans la suite, on suppose que $v = (2, -1, 0)$.

- **a.** Calculer $f(v)$. f est-il un automorphisme ?
- **b.** Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- **c.** On note $w = (-1, 1, 0)$ et $z = (0, -1, 1)$. Montrer que la famille (w, z) est également une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- **d.** En déduire, sans calculs supplémentaires, une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
- **e.** Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, w, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **f.** Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Une urne contient des boules noires en proportion p (avec $p \in]0; 1[$). On pioche dans cette urne successivement et avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages effectués.

X a-t-elle plus de chances de prendre une valeur paire ou impaire ?

Math 1NSD2. 2023-2024

Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 5.

Exercice 1

1. Question de cours. Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. Rappeler la définition de la dérivabilité de f en x_0.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(0), & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

2. Montrer, pour tout réel x non nul, l'égalité

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x} - \frac{F(-x)-F(0)}{x}\right).$$

3. En déduire que g est continue en 0.

4. Montrer enfin que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère une urne constituée de n boules, dont k sont blanches et $n-k$ sont noires. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne (on fait donc n tirages), et on note X le numéro du tirage amenant la dernière boule blanche.

1. Que vaut $X(\Omega)$? Justifier.

2. À l'aide de la formule des probabilités composées, montrer que $P(X=k) = \dfrac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \dfrac{1}{\binom{n}{k}}$.

3. Soit $i \in [\![k;n]\!]$.

a. Montrer qu'il y a $\binom{i-1}{k-1}$ tirages correspondant à l'évènement $(X=i)$, et que ces tirages ont tous la même probabilité de se produire.

b. En déduire que, pour tout $i \in X(\Omega)$,

$$P(X=i) = \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}.$$

4. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{i}{k-1}$.

5. Calculer $E(X)$.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 6.

Exercice 1

1. Question de cours. Définition de famille libre, famille liée, base et dimension d'un espace vectoriel.

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$f(e_1) = 2(e_3 - e_2), \quad f(e_2) = 3e_1 + 5e_2 - 3e_3, \quad f(e_3) = 2(e_1 + e_2).$$

2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme est-il injectif? surjectif?
4. On introduit les sous-espaces

$$E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}), \quad \text{et} \quad E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}).$$

a. Trouver une base $\{u\}$ de E_1 et une base $\{v, w\}$ de E_2.
b. Montrer que $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
c. Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Soit $x \in [0, 1[$ un réel fixé.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$

2. Établir par encadrement que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Math 1NSD2. 2023-2024

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 7.

Exercice 1

1. Question de cours. Citer le théorème de convergence monotone pour les suites.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0,1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 1$.
3. Démontrer que la suite est monotone.
4. En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

1. Soit $0 < p < 1$. On dit que X suit la loi géométrique de paramètres p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

a. Vérifier que la formule ci-dessus définit bien une variable aléatoire.

b. Soit $0 < p < 1$, et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètres p. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X > k)$.

c. Montrer que

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{(X>k)}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > n). \qquad (\star)$$

Une telle loi est dite *sans mémoire*.

2. On va montrer que la seule loi discrète sans mémoire est la loi géométrique. Soit donc X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $(\star)$. On pose $q = \mathbb{P}(X > 1)$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.
b. En déduire que X suit une loi géométrique de paramètres $p = 1 - q$.

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 8.

Exercice 1

1. Question de cours. Définition d'un endomorphisme, noyau et image d'un endomorphisme, caractérisation de l'injectivité avec le noyau.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'application linéaire définie par
$$f(e_1) = f(e_3) = e_3, \quad f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3.$$

2. a. Déterminer le noyau de f. f est-elle injective ?
b. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On la note A.

3. On pose $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$ et $\varepsilon_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
a. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
b. Écrire la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On la note B.

4. On note
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
a. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
b. Calculer PBP^{-1}.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :
$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.

2. a. Établir que la suite (I_n) est décroissante et minorée.
b. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x.$
b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 9.

Exercice 1

1. Question de cours. Formule du binôme.

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. On considère la matrice M et N définies par

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer des réels x et y tels que $M = xN + yI$ où I est la matrice unité d'ordre 4.

3. Calculer N^2. Conjecturer une formule pour N^k (avec $k \geq 1$) que l'on démontrera par récurrence.

4. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de M^n en fonction de I, de N et de n. On montrera que

$$M^n = (a-b)^n I + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N.$$

Exercice 2

Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(0) = \ln(2)$ avec

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 10.

Exercice 1

1. Question de cours. Rappeler la définition de l'image et du noyau d'un endomorphisme, énoncer le théorème du rang.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

2. a. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par u.
b. Montrer que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u, $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont aussi stables par v.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$ et on note (e_1, e_2) une base de $\mathbb{R}^2$. On considère les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$u(e_1) = e_2, \quad u(e_2) = e_1, \quad v(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad v(e_2) = e_2.$$

a. Déterminer le noyau et l'image de u et vérifier qu'ils sont bien stables par v.
b. Que peut-on dire de la réciproque de la propriété démontrée en question 2.b. ?

4. a. On suppose que u est un projecteur c'est-à-dire que $u^2 = u$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$, ce qui signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \exists!\ (y, z) \in \mathrm{Ker}(u) \times \mathrm{Im}(u),\ x = y + z.$$

b. Démontrer qu'alors u et v commutent si et seulement si $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $]0\ ,\ +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \ln(x) + x^n$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution qu'on notera x_n.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \leqslant 1$.
(3) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
(b) En déduire le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(4) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (on ne demande pas de trouver sa limite).

Math 1NSD2. 2023-2024

Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 11.

Exercice 1

1. Question de cours. Rappeler la définition du coefficient binomial, l'exprimer sous forme de factorielles et donner deux exemples dans lesquels cet objet apparaît.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$.

2. Montrer l'égalité
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

3. Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. En déduire l'égalité
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Exercice 2

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les variations de $x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer u_1, u_2, u_3 puis montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
3. En déduire qu'elles convergent.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 12.

Exercice 1

1. Question de cours. Inverse d'une matrice. Formule du binôme de Newton pour les matrices.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A - 2I_n)^3 = 0_n$ avec $A \neq 2I_n$.

2. Montrer que $A - 2I_n$ n'est pas inversible. *(On pourra distinguer les cas $(A - 2I_n)^2 = 0_n$ et $(A - 2I_n)^2 \neq 0_n$).*

3. Justifier que A est inversible et que son inverse vaut

$$A^{-1} = \frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I_n.$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k + e^{-k}}.$$

1. Déterminer la monotonie de la suite (S_n).

2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant e^{-k}.$$

3. En déduire que $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \leqslant \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}.$$

4. En déduire que la suite (S_n) converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant \frac{e}{e-1}.$$

.

Math 1NSD2. 2023-2024

Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

1D2 - Oral de mathématiques

Mardi 4 Juin 2024

Sujet 13.

Exercice 1

1. Question de cours. Théorème de la bijection.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - 2x^3 + \dfrac{2}{n}x(x-1) \end{array}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n s'annule en un unique point de $[0;1]$. Dans la suite, on notera u_n le réel de $[0;1]$ tel que $f(u_n) = 0$.

3. Déterminer le sens de variation de (u_n) puis montrer qu'elle converge. Préciser sa limite.

Exercice 2

1. Question de cours. Loi d'une variable aléatoire.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considére une urne composée de n boules, numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

2. Montrer que pour tout $k \in [\![2; n]\!]$,

$$P(X \leqslant k) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

3. En déduire la loi de X.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.