Concours Blanc - Épreuve Math C

Lundi 3 Mars
Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré.

On remarquera que la numérotation des questions est ré-initialisée à chaque section. On prendra donc bien garde de précéder ses réponses de la section dont les questions font partie.

Les questions précédées d'une $(*)$ sont réservées aux 5/2 ; on a choisi de ne pas réécrire le sujet initial bien que le programme de mathématiques n'ait pas encore été traité dans son intégralité.

Préambule

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction tangente, puis donner, sans démonstration, sa parité et sa dérivée, ainsi que, pour sa restriction à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ses variations (on demande le tableau de variations, où apparaîtront les limites aux bornes).

2. Montrer, à l'aide d'un théorème de cours qui sera énoncé, que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, et en déduire l'existence de sa fonction réciproque arctangente.
onner, sans démonstration, la dérivée de la fonction arctangente.

3. Déduire des variations de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ celles de sa réciproque arctangente, et retrouver ce résultat à l'aide de la dérivée de la fonction arctangente obtenue à la question précédente.

4. Tracer, sur un même graphe, les courbes représentatives de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$ (*échelle : 2 cm pour une unité*).
On rappellera comment le tracé de la courbe représentative de la fonction arctangente se déduit de celui de la fonction tangente.

5. Exprimer, pour tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, la quantité $1 + \frac{1}{\tan^2 t}$ en fonction **uniquement** de $\sin^2 t$.

Partie I

Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2}.$$

1. a. Étudier, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale à paramètre $F(x)$.

b. Que vaut $F(0)$?

c. Exprimer, pour tout réel $x, F(x)$ en fonction de x.

2. Soit α un réel positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}} \quad , \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} \quad , \quad J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}.$$

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que la série $\sum u_n$ converge.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_{n+1} \leq J_n \leq I_n.$$

c. À l'aide du changement de variable $\frac{1}{\tan t} = u$, que l'on justifiera avec soin, montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

(*On pensera à utiliser le résultat de la Question **5.** du Préambule*)

d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_{n+1} \leq J_n \leq u_n.$$

e. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ converge.

Partie II

1. a. Soit R un réel strictement positif, et f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-R,R[$, sous la forme:

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

où, pour tout entier naturel n, a_n et b_n sont des réels.

b. Rappeler la formule du produit de Cauchy donnant le produit des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Que peut-on dire sur le rayon de convergence?

c. Appliquer la question précédente pour exprimer, pour réel $x \in]-R,R[$, le développement en série entière de $(f(x))^2$.

2. On suppose désormais que la fonction f s'annule en zéro, et que, pour tout réel x de $]-R,R[$:

$$f'(x) = 1 + (f(x))^2.$$

a. En déduire la relation de récurrence vérifiée, pour tout entier naturel n, par les coefficients a_n.

b. Démontrer, par récurrence forte, que, pour tout entier naturel p : $a_{2p} = 0$.
Que peut-on en déduire pour la parité de la fonction f et son développement en série entière?

c. Montrer que $f'(0) = 1$, puis calculer : a_1, a_3, a_5, a_7.

d. *On admettra, dans ce qui suit, que la fonction tangente est développable en série entière sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
À l'aide des résultats précédents, donner le développement limité, à l'ordre 7, au voisinage de zéro, de la fonction f, et en déduire celui de la fonction tangente, au même ordre, en zéro.

Partie III

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u.$$

1. a. Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale H_n.

b. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 u^{2n} \mathrm{d}u.$$

c. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u.$$

d. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} H_n.$$

2. Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on note : $\sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$.
On pose :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan x} \mathrm{d}x \quad , \quad L_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x} \mathrm{d}x.$$

a. Que vaut: $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[2n]{x}$?

b. Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence des intégrales K_n et L_n.

c. Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.

d. Étudier le sens de variation de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

e. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x} \mathrm{d}x \geq \frac{\pi}{4}.$$

f. En déduire la convergence de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} (K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}$$

3. a. Pour tout entier naturel non nul n, effectuer, en le justifiant, le changement de variable $\tan x = u^{2n}$ dans l'intégrale $K_n + L_n$, puis donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation entre $(K_n + L_n)$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u.$$

b. En déduire l'existence d'une constante réelle H telle que, lorsque n tend vers l'infini :

$$H_n \sim \frac{H}{n}.$$

Partie IV

Soit ϕ la fonction définie, pour tout réel non nul x, par :

$$\phi(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en zéro.

Dans ce qui suit, on désigne encore par ϕ la fonction ainsi prolongée. On admettra que la fonction ϕ est développable en série entière sur $]-2\pi, 2\pi[$, sous la forme :

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

où, pour tout entier naturel n, B_n est un coefficient réel.

2. Que vaut B_0 ?

3. En remarquant que, pour tout réel x de $]-2\pi, 2\pi[$:

$$x = (e^x - 1)\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

montrer que l'on peut aussi écrire :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{x^n}{n!}.$$

4. **a**. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k = 0$$

puis :

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k.$$

b. Calculer $2B_2$ et $4B_4$. Que remarque-t-on par rapport aux coefficients a_3 et a_5 de la Partie **II**?

●

Ce problème fait intervenir des intégrales généralisées, pour lesquelles la fonction tangente permet soit d'obtenir leur convergence, soit de les calculer. Cette très classique fonction trigonométrique vérifie aussi une équation différentielle permettant d'obtenir son développement en série entière, où interviennent les nombres de Bernoulli, que l'on retrouve dans de nombreux autres développements en série entière, ou encore dans la formule d'Euler Mac-Laurin, qui relie des sommes discrètes où apparaissent également les dérivées successives de la fonction, et des intégrales.

Annexe : Quadrillage à rendre avec la copie