Concours Blanc - Épreuve Math C

Solution

Ce sujet provient de la session 2022.

Préambule

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction tangente, puis donner, sans démonstration, sa parité et sa dérivée, ainsi que, pour sa restriction à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ses variations (on demande le tableau de variations, où apparaîtront les limites aux bornes).

Solution. La fonction tan est définie sur

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[=: \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k.$$

La fonction tan est impaire sur son ensemble de définition ; sur chacun des I_k, elle est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \qquad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$$

donc tan est strictement croissante sur chacun des intervalles I_k. On dresse alors sont tableau de variations ci-dessous sur I_0 comme demandé :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	‖	$+$	‖
$\tan$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

□

2. Montrer, à l'aide d'un théorème de cours qui sera énoncé, que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, et en déduire l'existence de sa fonction réciproque arctangente.
Donner, sans démonstration, la dérivée de la fonction arctangente.

Solution. Le **théorème de la bijection monotone** affirme qu'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
En appliquant ce théorème à la fonction tangente sur $I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on montre que tan réalise une bijection de I_0 sur $\mathbb{R}$, dont la réciproque, arctangente (notée arctan), est continue et strictement monotone.
Comme *tan* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_0 et que sa dérivée ne s'annule jamais sur cet intervalle, sa réciproque est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

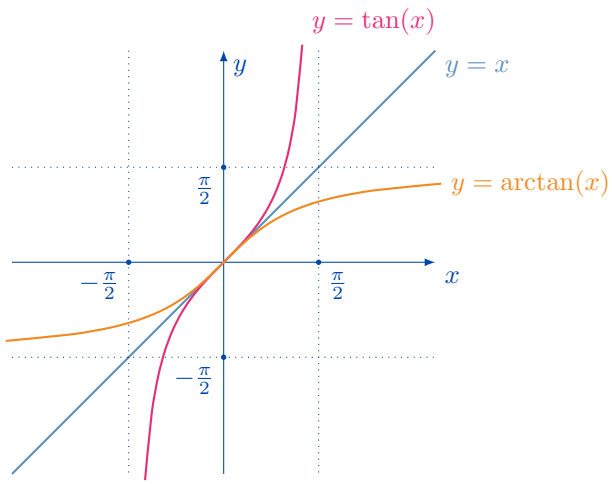
□

3. Déduire des variations de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ celles de sa réciproque arctangente, et retrouver ce résultat à l'aide de la dérivée de la fonction arctangente obtenue à la question précédente.

Solution. Le théorème du cours utilisé à la question précédente affirme que la bijection réciproque a le même sens de variation que la fonction de départ; ainsi arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui est d'ailleus cohérent avec le signe strictement positif de sa dérivée explicitée à la question précédente. □

4. Tracer, sur un même graphe, les courbes représentatives de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$ (*échelle : 2 cm pour une unité*).
On rappellera comment le tracé de la courbe représentative de la fonction arctangente se déduit de celui de la fonction tangente.

Solution. Le graphe de la bijection réciproque de d'une fonction f se déduit de celui de f par symétrie orthogonale (ou réflexion) par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



□

5. Exprimer, pour tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, la quantité $1 + \frac{1}{\tan^2 t}$ en fonction **uniquement** de $\sin^2 t$.

Solution. Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$,

$$1 + \frac{1}{\tan^2 t} = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

□

Partie I

Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^2 + t^2}.$$

1. a. Étudier, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale à paramètre $F(x)$.

Solution. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$; de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{1 + x^2 + t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann); de même,

$$\frac{1}{1 + x^2 + t^2} \underset{t \to -\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

Par **théorème de comparaison par équivalent**,

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2}$$

convergent (elles ont d'ailleurs la même valeur par un argument de parité), donc l'intégrale $F(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

b. Que vaut $F(0)$?

Solution. On fait le calcul "à vue" à l'aide de la fonction arctan dont on a rappelé l'expression de la dérivée dans le préambule :

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

□

c. Exprimer, pour tout réel $x, F(x)$ en fonction de x.

Solution. Pour $x \in \mathbb{R}$, le changement de variable $t = u\sqrt{1+x^2}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; $\mathrm{d}t = \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}u$, donc

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}u}{1+x^2+u^2(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{F(0)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}.$$

□

2. Soit α un réel positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}} \quad , \quad I_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t} \quad , \quad J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2 t}.$$

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que la série $\sum u_n$ converge.

Solution. Pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$, et, lorsque $n \to +\infty$, $u_n \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{n^\alpha\pi^\alpha}} \sim \dfrac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}$.

Or, $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge si, et seulement si, $\dfrac{\alpha}{2} > 1$, c'est à dire si, et seulement si, $\alpha > 2$.

D'après le **théorème de comparaison des séries à termes positifs**, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$. □

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_{n+1} \leq J_n \leq I_n.$$

Solution. Pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$,

$$\frac{1}{1+(n+1)^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t} \leq \frac{1}{1+t^\alpha\sin^2 t} \leq \frac{1}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t}.$$

Par croissance de l'intégrale entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n+1)^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2 t} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t}.$$

Mais après le changement de variable (affine donc licite) $t = n\pi + u$ (qui donne $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$):

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(u+n\pi)} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+n^\alpha\pi^\alpha(-1)^{2n}\sin^2 u} = I_n,$$

donc finalement $I_{n+1} \leq J_n \leq I_n$. □

c. À l'aide du changement de variable $\frac{1}{\tan t} = u$, que l'on justifiera avec soin, montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

(*On pensera à utiliser le résultat de la Question* ***5.*** *du Préambule*)

Solution. Il vaut mieux scinder l'intégrale en deux morceaux, correspondant aux intervalles $E_0 = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $E_1 = \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur lesquels le changement de variable $u = \frac{1}{\tan t} = \frac{\cos t}{\sin t}$ est strictement décroissant et de classe $\mathcal{C}^1$.

L'image de E_0 par $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t}$ est l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, l'image de E_1 est $\mathbb{R}_-^*$.

Sur E_0, $t = \arctan \dfrac{1}{u}$ et sur E_1, $t = \pi + \arctan \dfrac{1}{u}$; dans les deux cas, $\mathrm{d}t = \dfrac{-\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

Enfin, sur les deux intervalles d'intégration, d'après la Question **5.** du Préambule, $1+u^2 = \dfrac{1}{\sin^2 t}$ donc $\sin^2 t = \dfrac{1}{1+u^2}$, et

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t} &= \frac{1}{1+\frac{n^\alpha\pi^\alpha}{1+u^2}}\frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha} \\
\int_{E_0}\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t} &= \int_{+\infty}^{0}\frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha} \\
&= \int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{E_1}\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t} &= \int_{0}^{-\infty}\frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha} \\
&= \int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha}
\end{aligned}$$

donc par relation de Chasles :

$$I_n = \int_{E_0\cup E_1}\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 t} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha} = F\left(n^\alpha\pi^\alpha\right).$$

□

d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_{n+1} \leq J_n \leq u_n.$$

Solution. Soit n un entier naturel non nul.
D'après la Question **1.c.** de cette partie,

$$F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$$

donc

$$F\left(n^\alpha\pi^\alpha\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^\alpha\pi^\alpha}} = u_n.$$

Alors $I_n = u_n$, donc l'encadrement montré en Question **2.b.** s'écrit bien

$$u_{n+1} \leq J_n \leq u_n.$$

□

e. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2 t}$ converge.

Solution. D'après la Question **2.d.**, par sommation :

$$\sum_{n=0}^{N} u_{n+1} \leq \sum_{n=0}^{N} J_n \leq \sum_{n=0}^{N} u_n,$$

donc en posant $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ (et après un petit décalage d'indice à gauche),

$$S_{N+1} - u_0 \leq \int_0^{(N+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2 t} \leq S_N.$$

Il en résulte que

$$\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2 t}\text{converge}\right) \Longrightarrow (\text{la suite } (S_N) \text{ converge}) \Longrightarrow \left(\text{la série } \sum u_n \text{ converge}\right)$$

Réciproquement,

$$\left(\text{la série } \sum u_n \text{ converge}\right) \Longrightarrow (\text{la suite } (S_N) \text{ converge}) \Longrightarrow \left(\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t} \in \mathbb{R}\right)$$

Mais, comme $\dfrac{1}{1+t^\alpha \sin^2 t} > 0$, $A \mapsto \displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ est croissante et l'existence de $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ équivaut à celle de

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t},$$

avec la même valeur.

Finalement, en utilisant le résultat de la Question **2.a.**,

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t} \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum u_n \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \alpha > 2.$$

□

Partie II

1. Soit R un réel strictement positif, et f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-R, R[$, sous la forme:

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

où, pour tout entier naturel n, a_n et b_n sont des réels.

a. Rappeler la formule du produit de Cauchy donnant le produit des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Que peut-on dire sur le rayon de convergence?

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

Le **produit de Cauchy** des deux séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n x^n$:

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Si les deux séries facteurs convergent sur $]-R, R[$, on peut affirmer que le rayon de convergence de la série produit est supérieur ou égal à R. □

b. Appliquer la question précédente pour exprimer, pour réel $x \in]-R, R[$, le développement en série entière de $(f(x))^2$.

Solution. Prenons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n$ dans la formule précédente, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$ donc

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}\right) x^n.$$

□

2. On suppose désormais que la fonction f s'annule en zéro, et que, pour tout réel x de $]-R, R[$:

$$f'(x) = 1 + (f(x))^2.$$

a. En déduire la relation de récurrence vérifiée, pour tout entier naturel n, par les coefficients a_n.

Solution. Comme $f(0) = 0$, il suit que $a_0 = 0$.
En utilisant le **théorème de dérivation terme à terme** d'une série entière, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} \right) x^n,$$

soit après décalage d'indice :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} \right) x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on peut affirmer

- ✗ $a_1 = 1 + a_0^2$, donc $a_1 = 1$.
- ✗ $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
  - ✓ Pour $n = 1$ on a donc $2a_2 = 0$ donc $a_2 = 0$.
  - ✓ Pour $n \geq 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$, extensible au cas $n = 1$ avec la convention $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} a_k a_{n-k} = 0$.

□

b. Démontrer, par récurrence forte, que, pour tout entier naturel p : $a_{2p} = 0$.
Que peut-on en déduire pour la parité de la fonction f et son développement en série entière?

Solution. Montrons par récurrence forte sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{N}_p : a_{2p} = 0$.

- ✗ **Initialisation.** Puisque $a_0 = 0$: $\mathcal{N}_0$ est vraie.
- ✗ **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{N}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0, p]\!]$.
  - ✓ Si $p = 0$, alors $a_{2p+2} = a_2 = 0$ conformément au résultat de la Question **2.a.**.
  - ✓ Si $p \geq 1$, $a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \dfrac{1}{2p+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{2p} a_k a_{2p+1-k}$.
    Or, pour tout entier pair $k \in [\![1, 2p]\!]$, $a_k = 0$ par hypothèse de récurrence; pour tout entier <u>impair</u> $k \in [\![1, 2p]\!]$, $2p + 1 - k$ est un entier **pair** de $[\![1, 2p]\!]$, donc $a_{2p+1-k} = 0$. Dans tous les cas, $a_k a_{2p+1-k} = 0$ donc $a_{2p+2} = 0$, ce qui achève la preuve de $\mathcal{N}_{p+1}$.

On conclut par récurrence forte que $a_{2p} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}.$$

La fonction f est donc impaire.

□

c. Montrer que $f'(0) = 1$, puis calculer : a_1, a_3, a_5, a_7.

Solution. On a vu en Question **2.a.** que $a_1 = 1$, donc $f'(0) = a_1 = 1$. Alors $a_3 = \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{k=1}^{1} a_k a_{2-k} = \dfrac{a_1^2}{3}$ donc $a_3 = \dfrac{1}{3}$.

Puis,

$$a_5 = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{3} a_k a_{4-k} = \frac{1}{5}(a_1 a_3 + a_2^2 + a_3 a_1) = \frac{2a_1 a_3}{5} = \frac{2}{15}.$$

Enfin

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{5} a_k a_{6-k} = \frac{1}{7} \left(a_1 a_5 + a_2 a_4 + a_3^2 + a_4 a_2 + a_5 a_1 \right) = \frac{1}{7} \left(2a_1 a_+ a_3^2 \right) \\ &= \frac{1}{7} \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{7} \left(\frac{12}{45} + \frac{5}{45} \right) = \frac{17}{315} \end{aligned}$$

□

d. *On admettra, dans ce qui suit, que la fonction tangente est développable en série entière sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
À l'aide des résultats précédents, donner le développement limité, à l'ordre 7, au voisinage de zéro, de la fonction f, et en déduire celui de la fonction tangente, au même ordre, en zéro.

Solution. On sait que $\tan(0) = 0$ et que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Par hypothèse (de l'énoncé) tan est dévelopable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc elle admet *a fortiori* un développement limité en zéro à tout ordre, et en particulier , pour $x \to 0$,

$$\tan(x) = a_1\, x + a_3\, x^3 + a_5\, x^5 + a_7 x^7 + o(x^7) = \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).$$

□

Partie III

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u.$$

1. a. Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale H_n.

Solution. Soit n entier naturel non nul fixé.

$$\forall u \geq 0, \qquad 1 + u^{4n} = 1 + (u^{2n})^2 > 0,$$

donc la fonction intégrée est strictement positive (et continue) sur $[0; +\infty[$.

L'intégrale H_n est par conséquent seulement impropre en $+\infty$. De plus,

$$\frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{u^{2n}}{u^{4n}} = \frac{1}{u^{2n}},$$

or $n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2 > 1$,
donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}} \mathrm{d}u$$

est une intégrale de Riemann convergente.

Par **critère d'équivalence** pour les intégrales de fonctions positives, on peut en conclure que l'intégrale H_n est convergente. □

b. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{2n} \mathrm{d}u.$$

Solution.

$$\int_0^1 u^{2n} \mathrm{d}u = \left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

c. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u.$$

Solution. Pour tout $u \geq 0$, on a:

$$0 \leq \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leq \frac{u^{2n}}{u^{4n}} = \frac{1}{u^{2n}},$$

donc par propriété de croissance des intégrales (ces intégrales étant bien convergentes, nous l'avons prouvé en **1.a.**), on peut écrire:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}} \mathrm{d}u.$$

Or,

$$\lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{1}{u^{2n}} \mathrm{d}u = \lim_{X \to +\infty} \left[\frac{u^{-2n+1}}{-2n+1} \right]_1^X = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{-2n+1} \left(\frac{1}{X^{2n-1}} - 1 \right) = \frac{1}{2n-1}.$$

Finalement:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u \leq \frac{1}{2n-1}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u = 0.$$

□

d. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} H_n.$$

Solution. D'après la relation de Chasles, $H_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u.$

- ✗ Nous avons prouvé à la Question **1.c.** que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u = 0.$
- ✗ Montrons que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u = 0$:

$$\forall u \in [0,1], 0 \leq \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leq u^{2n}$$

car $1 + u^{4n} \leq 1$.
Donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u \leq \int_0^1 u^{2n} \mathrm{d}u.$$

On a vu en **1.b.** que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 u^{2n} \mathrm{d}u = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u = 0.$

Bilan: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} H_n = 0.$ □

2. Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on note : $\sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$.
On pose :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan x} \mathrm{d}x \quad , \quad L_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x} \mathrm{d}x.$$

a. Que vaut: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \sqrt[2n]{x}$?

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[2n]{x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{2n} \right) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

□

b. Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence des intégrales K_n et L_n.

Solution.

✗ L'intégrale K_n est impropre en 0, mais comme $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[2n]{\tan(x)} = 0$ (en utilisant la question précédente et le fait que $\tan(x) \to 0$, $x \to 0$), la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0, ce qui implique que l'intégrale K_n est **faussement impropre en** 0.
Donc l'intégrale K_n est convergente.

✗ L'intégrale L_n est impropre en $\frac{\pi}{2}$, car tan n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$.

On va ramener le problème en 0 en effectuant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, qui est bijectif de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$.
On a $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$, donc:

$$L_n = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sqrt[2n]{\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\frac{\cos(u)}{\sin(u)}}\mathrm{d}u.$$

Cette dernière intégrale est impropre en 0.
Or

$$\sqrt[2n]{\frac{\cos(u)}{\sin(u)}} \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt[2n]{\frac{1}{u}}$$

car $\sqrt[2n]{\frac{\cos(u)}{\sin(u)} \times u}$ tend vers 1 lorsque u tend vers 0.

De plus,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{u^{1/2n}}\mathrm{d}u$$

qui est une intégrale de Riemann convergente car $\frac{1}{2n} < 1$.

D'après le **critère d'équivalence** pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale L_n est convergente.

□

c. Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.

Solution.

✗ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $K_n \leq K_{n+1}$.
On a : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan(x) \in]0, 1]$, donc $\ln(\tan(x)) < 0$.
Par croissance de l'exponentielle, et comme

$$\frac{\ln(\tan(x))}{2n} \leq \frac{\ln(\tan(x))}{2n+2},$$

$$\exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n}\right) \leq \exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n+2}\right).$$

On utilise ensuite la propriété de croissance de l'intégrale pour affirmer que $K_n \leq K_{n+1}$.

✗ Montrons que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right], \tan(x) \in]0, 1],$$

donc $\sqrt[2n]{\tan(x)} \leq 1$.
Par propriété de croissance de l'intégrale,

$$K_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Bilan: la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $\frac{\pi}{4}$. □

d. Étudier le sens de variation de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], \tan(x) \leq 1,$$

donc $\ln(\tan(x)) \leq 0$, donc

$$\exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n+2}\right) \leq \exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n}\right).$$

Par propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit que $L_{n+1} \leq L_n$.
Bilan: a suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

□

e. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x}\mathrm{d}x \geq \frac{\pi}{4}.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], \tan(x) \geq 1,$$

donc $\ln(\tan(x)) \geq 0$, donc $\exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n}\right) \geq 1$.
Par propriété de croissance de l'intégrale,

$$L_n \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

□

f. En déduire la convergence de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}(K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}$$

Solution. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc elle converge.
D'autre part, la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée (question **2.c.**)), donc elle converge également.

Cela a donc du sens de s'intéresser à $\lim\limits_{n\to+\infty}(K_n + L_n)$.

On sait que:

- ✗ $\forall n \in \mathbb{N}^*, K_n \geq 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n \geq 0$.
- ✗ $\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n \geq \frac{\pi}{4}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n \geq \frac{\pi}{4}$.

Bilan: $\lim\limits_{n\to+\infty}(K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}$.

□

3. a. Pour tout entier naturel non nul n, effectuer, en le justifiant, le changement de variable $\tan x = u^{2n}$ dans l'intégrale $K_n + L_n$, puis donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation entre $(K_n + L_n)$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u.$$

Solution. D'après la relation de Chasles,

$$K_n + L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x}\,\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable $x \mapsto \exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n}\right)$ est bijectif, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $]0; +\infty[$.
On a :

$$u^{2n} = \tan(x) \Rightarrow 2nu^{2n-1}\mathrm{d}u = (1+\tan^2(x))\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2nu^{2n-1}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u.$$

Donc

$$K_n + L_n = \int_0^{+\infty} u \times \frac{2nu^{2n-1}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u,$$

et finalement:

$$K_n + L_n = 2n \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u.$$

□

b. En déduire l'existence d'une constante réelle H telle que, lorsque n tend vers l'infini :

$$H_n \sim \frac{H}{n}.$$

Solution. La question précédente nous permet d'affirmer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \dfrac{K_n + L_n}{2n}$.
Si on note

$$H := \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} (K_n + L_n) \neq 0,$$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} (K_n + L_n) \geq \dfrac{\pi}{4}$, alors

$$\frac{K_n + L_n}{2} \sim H,$$

et finalement :

$$H_n \sim \frac{H}{n}.$$

□

Partie IV

Soit ϕ la fonction définie, pour tout réel non nul x, par :

$$\phi(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en zéro.

Solution.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \phi(x) = \frac{x}{x + o(x)}$$

car, le développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle est $\exp(x) = 1 + x + o(x)$.
Donc $\phi(x) = \frac{1}{1+o(1)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.
La fonction ϕ est donc bien prolongeable par continuité en zéro. □

Dans ce qui suit, on désigne encore par ϕ la fonction ainsi prolongée. On admettra que la fonction ϕ est développable en série entière sur $]-2\pi, 2\pi[$, sous la forme :

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

où, pour tout entier naturel n, B_n est un coefficient réel.

2. Que vaut B_0 ?

Solution. D'après le développement en série entière de ϕ, on a $\phi(0) = \dfrac{B_0}{0!}$.
Or $\phi(0) = 1$ d'après la question précédente, donc $B_0 = 1$. □

3. En remarquant que, pour tout réel x de $]-2\pi, 2\pi[$:

$$x = (e^x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

montrer que l'on peut aussi écrire :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Solution.

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \setminus \{0\},$$
$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

donc $x = (e^x - 1)\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.
Pour $x = 0$, cette dernière relation est aussi vraie car $0 = (1-1)B_0$.
On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Nous allons effectuer un produit de Cauchy pour déterminer le développement en série entière de

$$(e^x - 1)\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Comme les formules du cours sont valables pour des séries qui commencent à l'indice 0, nous allons donc écrire:

- ✗ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{n!}$
- ✗ $\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, où $\forall n \geq 0, b_n = \frac{B_n}{n!}$

D'après le cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières, on peut donc affirmer que:

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, (e^x - 1)\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

où : $\forall n \geq 0, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.

- ✗ Si $n = 0$, $c_0 = a_0 b_0 = 0$
- ✗ Si $n \geq 1$, $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k$ car $a_0 = 0$, donc

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!}\frac{B_k}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} B_k$$

Finalement,

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} B_k\right).$$

□

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} B_k = 0$$

puis :

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} B_k.$$

Solution. Par unicité d'un développement en série entière, on peut identifier les coefficients de l'égalité ci-dessus, ce qui nous conduit à:

- ✗ Pour le coefficient en x: $1 = \frac{1}{1!}\left(\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} B_k\right)$, *i.e.* $B_0 = 1$, ce qu'on savait déjà.
- ✗ pour tous les autres coefficients: $\forall n \geq 2, 0 = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} B_k\right)$, *i.e.*

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

En mettant le dernier terme de la somme ci-dessous à part, on obtient:

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

Or $\binom{n+1}{n} = n+1$, donc

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

□

b. Calculer $2B_2$ et $4B_4$. Que remarque-t-on par rapport aux coefficients a_3 et a_5 de la Partie **II**?

Solution. La formule montrée ci-dessus va nous permettre de calculer de proche en proche les coefficients B_n:

- ✗ Nous avons déjà $B_0 = 1$.
- ✗ Appliquons la formule ci-dessus pour $n = 1$:

$$2B_1 = -\binom{2}{0} B_0 = -B_0$$

donc $B_1 = -\frac{1}{2}$.

- ✗ Pour $n = 2$:

$$3B_2 = -\binom{3}{0} B_0 - \binom{3}{1} B_1 = -B_0 - 3B_1,$$

donc $B_2 = \frac{1}{6}$.

- ✗ Pour $n = 3$:

$$4B_3 = -\binom{4}{0} B_0 - \binom{4}{1} B_1 - \binom{4}{2} B_2 = -B_0 - 4B_1 - 6B_2 = 0,$$

donc $B_3 = 0$.

- ✗ Pour $n = 4$:

$$5B_4 = -\binom{5}{0} B_0 - \binom{5}{1} B_1 - \binom{5}{2} B_2 - \binom{5}{3} B_3 = -B_0 - 5B_1 - 10B_2 - 10B_3 = -\frac{1}{6},$$

donc $B_4 = -\frac{1}{30}$.

On peut donc affirmer que $2B_2 = \frac{1}{3}$ et $4B_4 = -\frac{2}{15}$.

On remarque que l'on retrouve ainsi les coefficients du développement limité de la fonction tangente trouvés dans la **Partie II**, où on avait obtenu: $a_3 = \frac{1}{3} = 2B_2$, et $a_5 = \frac{2}{15} = -4B_4$. □

●

Ce problème fait intervenir des intégrales généralisées, pour lesquelles la fonction tangente permet soit d'obtenir leur convergence, soit de les calculer. Cette très classique fonction trigonométrique vérifie aussi une équation différentielle permettant d'obtenir son développement en série entière, où interviennent les nombres de Bernoulli, que l'on retrouve dans de nombreux autres développements en série entière, ou encore dans la formule d'Euler Mac-Laurin, qui relie des sommes discrètes où apparaissent également les dérivées successives de la fonction, et des intégrales.