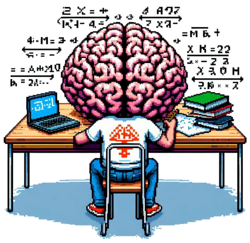

Devoir maison n°1

À rendre le 27/09

Exercice 1

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

1. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$ et y préciser la limite de $f_n(x)$.
2. On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1/3$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence
$$u_{n+1} = f_n(u_n).$$
3. La suite (u_n) correspond-elle au type de suite dont le schéma d'étude est présenté en fin de **Chapitre 0** ?
4. Calculer u_2 et u_3.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. En déduire la monotonie de (u_n).
6. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n \leq \frac{1}{n}.$$
8. En déduite que la suite (nu_n) est croissante, puis qu'elle converge vers un réell $\ell' \in]0;1]$.
9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 1.$$
10. Conclure quant à la valeur de ℓ'. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une racine complexe z dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.

   a. Vérifier que le conjugué $\bar{z}$ de z est aussi une racine de P.
   b. Démontrer que, si z n'est pas un nombre réel, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que
   $$P = \left(X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2\right)^2 Q.$$
   c. En déduire que z est racine du polynôme dérivé P' de P.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n le polynôme $X^{2n} - 2nX + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

   a. Déterminer les racines complexes du polynôme dérivé P'_n.
   b. Combien le polynôme P_n admet-il de racines complexes?

Pour tout entier $n \geq 2$, on note f_n la fonction réelle définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1.$$

3. Combien l'équation $f_n(x) = 0$ admet-elle de solutions réelles?

4. On note u_n la plus grande des solutions réelles de l'équation précédente.

 a. Soit $\varepsilon > 0$. Que peut-on dire du signe de $f_n(1+\varepsilon)$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.
 b. $(*)$ Justifier le développement asymptotique

$$u_n = 1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$$

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, que l'on notera encore f, et préciser les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. Étudier la parité de f, ainsi que la nature des branches infinies de f.

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant 1$.

4. **a.** Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) + Q_n(x)\sin\left(x + (n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}.$$

 Préciser de plus les expressions de P_0, Q_0, P_1 et Q_1, ainsi que les expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

5. Soient U et V deux polynômes tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$.
 Montrer que les deux polynômes U et V sont constants nuls.

6. **a.** Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'unicité du couple (P_n, Q_n).
 b. En remarquant que sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $x\,f(x) = \sin x$, montrer à l'aide de la formule de Leibniz que :

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = x^{n+1} - (n+1)\,Q_n(x) \\ Q_{n+1}(x) = (n+1)\,P_n(x) \end{cases}$$

 c. Montrer alors que $Q_n = P_n'$ et que P_n est solution de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.
 d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de chacun des polynômes P_n et Q_n.
 e. Déterminer l'expression de $f^{(2)}$ et de $f^{(3)}$, et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ en 0.

7. $(*)$ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0.