Devoir maison n°5

Solution

Exercice 1

1. Développer $f(x) = (x+1)\ln(1+x)$ en série entière, et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Solution. On écrit $f(x) = x\ln(1+x) + \ln(1+x)$, ce qui permet d'utiliser le développement en série entière de $\ln(1+x)$. Ainsi, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \\ &= \sum_{i=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{i-2}}{i-1}x^i + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \text{ en posant } i = n+1 \text{ dans la première somme} \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)}x^n \end{aligned}$$

On a

$$\forall x \in]-1,1[,\ (x+1)\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)}x^n.$$

Posons $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)}x^n$. Pour $x \neq 0$ on a : $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|-\dfrac{n-1}{n+1}x\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$.

En utilisant la règle de d'Alembert, on en déduit que:

- ✗ si $|x| < 1$, la série converge absolument;
- ✗ si $|x| > 1$, la série diverge grossièrement.

Le rayon de convergence est donc $R = 1$. □

2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)}$.

Solution. On observe déjà que la série entière de la question précédente est absolument convergente en $x = 1$:

$$\left|\frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)}1^n\right| = \frac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Or $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann, donc le théorème de comparaison assure que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ converge.

Ainsi, la série entière $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)} x^n$ est définie sur $]-1,1]$, et donc par théorème elle est continue sur cet intervalle.
En faisant tendre x vers 1 dans la relation obtenue à la question précédente on obtient donc :

$$2\ln(2) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)} \iff \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)} = 2\ln(2) - 1.$$

Finalement : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)} = 2\ln(2) - 1.$ □

Exercice 2

On considère le système différentiel linéaire

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 2y & - & 2z \\ y' & = & -4x & - & 3y & + & 4z \\ z' & = & -2x & & & + & z \end{array} \right.$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ainsi, X est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : X est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $X' = AX$.

Solution. Il est clair que la matrice cherchée est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

2. Déterminer le spectre de A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

Solution. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(\lambda) & = & \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 4 & \lambda+3 & -4 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 4 & \lambda+3 & \lambda-1 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ & = & (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 4 & \lambda+3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 2 & \lambda+3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & = & (\lambda-1)((\lambda-1)(\lambda+3)+4) = (\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+1) \\ & = & (\lambda-1)(\lambda+1)^2 \end{array}$$

Les valeurs propres de A sont dont 1 et -1. Notons que le polynôme caractéristique est scindé donc A est au moins trigonalisable. On va déterminer une base de chaque sous-espace propre.

✗ Pour $\lambda = 1$. On a

$$\begin{array}{rcl} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3) & \iff & (A - I_3)X = 0 \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} 2y - 2z & = & 0 \\ -4x - 4y + 4z & = & 0 \\ -2x & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z \end{array} \right. \\ & \iff & X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

✗ Pour $\lambda = -1$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A + I_3) \iff (A + I_3)X = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y - 2z & = & 0 \\ -4x - 2y + 4z & = & 0 \\ -2x + 2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Donc $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On constate qu'en effet $\dim(E_1(A)) + \dim(E_{-1}(A)) \neq 3$ donc A n'est pas diagonalisable. □

3. Trigonaliser A.
On déterminera une matrice P inversible et une matrice T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$ avec T de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont les valeurs propres de A rangées par ordre décroissant.

Solution. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$. De la question précédente, on voit qu'il reste à trouver $w \in \mathbb{R}^3$ tel que :

✗ $f(w) = -v + w$
✗ (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Une fois que c'est fait, en notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w) et T la matrice de f dans cette nouvelle base, la formule de changement de base assure que $A = PTP^{-1}$ et, comme $f(u) = u$ et $f(v) = -v$, T aura bien la forme voulue. On résout donc. Soit $w = (x, y, z)$ le vecteur cherché.

$$f(w) = -v + w \iff (A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y - 2z & = & 1 \\ -4x - 2y + 4z & = & 0 \\ -2x + 2z & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & -\frac{1}{2} - z \end{array} \right.$$

En prenant $z = 0$, on obtient $w = (-1/2, 1, 0)$. On vérifie facilement que (u, v, w) est libre et qu'elle forme donc bien une base (pour une raison de cardinal) de $\mathbb{R}^3$. On a donc $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

4. On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.

Solution. On utilise la formule $A = PTP^{-1}$ et le fait que la dérivation est linéaire, donc $Y' = P^{-1}X'$. On a

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff P^{-1}X' = P^{-1}AX \\ &\iff Y' = P^{-1}PTP^{-1}X \\ &\iff Y' = TY. \end{aligned}$$

□

5. **a**. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : \varphi' = \varphi$.

Solution. Le cours de première année nous permet de résoudre sans mal cette équation homogène. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_1 = \{\varphi : t \longmapsto \lambda e^t, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

□

b. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : \varphi' = -\varphi$.

Solution. De manière analogue, 'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_2 = \{\varphi : t \longmapsto \lambda e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

□

c. Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(E_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.

Solution. L'équation homogène associée à (E_3) est l'équation (E_2) qu'on vient de résoudre. On a donc juste besoin de trouver une solution particulière, ce qu'on va faire avec la méthode de la variation de la constante. On cherche donc φ_p de la forme $\varphi_p(t) = \lambda(x)e^{-t}$. En injectant dans (E_3) on obtient

$$\lambda'(t)e^{-t} = ce^{-t},$$

ce qui donne $\lambda'(t) = c$. On prend donc $\lambda(t) = ct$ et on a une solution particulière $\varphi_p : t \longmapsto cte^{-t}$. Au final, l'ensemble des solutions de (E_3) est

$$\mathcal{S}_3 = \{\varphi : t \longmapsto (\lambda + ct)e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

□

d. Soit Y tel que $Y' = TY$. Déterminer l'expression des composantes de Y.

Solution. Notons $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
De $Y' = TY$, on déduit que α est solution de l'équation différentielle (E_1) donc, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha : t \longmapsto \lambda_1 e^t$.
Ensuite, γ est solution de l'équation différentielle (E_2) donc il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma : t \longmapsto \lambda_2 e^{-t}$.
Enfin, β vérifie $\beta' = -\beta + \gamma = -\beta + \lambda_2 e^{-t}$ et donc β est solution de l'équation différentielle (E_3) avec $c = \lambda_2$. Il existe donc $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma : t \longmapsto (\lambda_3 + \lambda_2 t)e^{-t}$. □

6. En déduire que les solutions générales de $(\mathcal{S})$, sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x(t) = \left(\lambda_2 t + \lambda_3 - \dfrac{1}{2}\lambda_2\right) e^{-t} \\ y(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t} \\ z(t) = (\lambda_2 t + \lambda_3)e^{-t} + \lambda_1 e^t \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des réels.

Solution. Comme $Y = P^{-1}X$, on a $X = PY$. Il suffit donc de multiplier par P le vecteur colonne Y dont in vient de trouver les composantes à la question précédente. On obtient bien le résultat voulu. □

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On prélève au hasard ces n boules une par une et sans remise (afin de vider l'urne).
À la suite de cette expérience, on note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, u_i le numéro de la boule obtenue au cours du $i-$ème tirage.
Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a un record au $i-$ème tirage si

$$u_i > \max\{u_1, \ldots, u_{i-1}\},$$

autrement dit, si la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement supérieurs aux numéros des boules tirées précédemment. D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement un record à l'instant 1.

Pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on introduit les événements :

- ✗ R_i : "il y a un record au $i-$ème tirage"
- ✗ $B_{i,k}$: "la boule obtenue $i-$ème tirage est numérotée k"
- ✗ $A_{i,k}$: "la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement inférieur à k"

Par convention, on a donc $P(R_1) = 1$.

Exemple. *Si $n = 8$ et que l'on obtient, dans cet ordre, les boules numérotés ②①③⑤④⑥⑧⑦, alors il y a un record aux tirages 1,3,4,6 et 7. Ainsi les événements*

$$R_1,\ R_3\ , R_4\ , R_6\ , R_7\ , B_{1,2}\ , B_{2,1}\ , B_{3,3}\ , A_{3,6}\ , A_{5,6},$$

notamment (ce ne sont pas les seuls), sont réalisés.

On modélise l'expérience par l'ensemble Ω des $n-$uplets de numéros de boules piochées, dont les composantes sont donc deux à deux distinctes et on considère P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

1. Quel est le cardinal de Ω?

Solution. Ω est l'ensemble des $n-$uplets ordonnées d'éléments choisis parmi $[\![1, n]\!]$ sans répétition.
Pour la première boule, on a n choix, pour la seconde $n-1$, pour la troisième $n-2$... et pour la dernière un seul choix.
Au final, il y a $n!$ éléments dans Ω.

C'est aussi le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$.

□

2. Combien y a-t-il de tirages de n boules successivement sans remise dont la dernière boule est celle numérotée n?
En déduire que $P(R_n) = \dfrac{1}{n}$.

Solution. On répète le même raisonnement que dans la questions précédente, mais les $n-1$ premières boules piochées (sans remise) sont à choisir parmi les boules numérotées de 1 à $n-1$. Et pour la dernière, on veut la boule numérotée n donc il y a un seul choix pour celle-ci. Au final, il y a $(n-1)!$ tirages correspondant à la situation demandée.

R_n est réalisée si et seulement si le $n-$ième tirage est un record ce qui arrive si et seulement si la $n-$ième boule piochée a un numéro strictement supérieur à tous les autres ce qui se produit si et seulement si la $n-$ième boule piochée porte le numéro n. D'après ce qui précède, il y a $(n-1)!$ tirages pour lesquels cette boule sort en dernier et $n!$ tirages en tout, on a donc bien

$$P(R_n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

□

3. Soit $i \in [\![2, n]\!]$.

a. Que vaut $P(R_i \cap B_{i,k})$ lorsque $k \in [\![1, i-1]\!]$?

Solution. Soit $k \in [\![1, i-1]\!]$. Si $R_i \cap B_{i,k}$ est réalisé, alors il y a un record au $i-$ème tirage en obtenant la boule numérotée k. Dans ce cas, les $i-1$ premières boules portent toutes un numéro strictement inférieur ou égal à k si bien que, même dans le meilleur des cas où on aurait les $i-1$ plus petits numéros (donc de 1 à $i-1$), il faut que $k > i-1$. Ce n'est pas le cas donc $R_i \cap B_{i,k} = \emptyset$ et donc $P(R_i \cap B_{i,k}) = 0$.

□

b. Justifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $R_i \cap B_{i,k} = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_{j,k}\right) \cap B_{i,k}$.

Solution. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. L'événement $R_i \cap B_{i,k}$ est réalisé si et seulement si il y a un record au $i-$ème tirage en obtenant la boule numérotée k si et seulement si les boules obtenues aux $i-1$ premiers tirages ont un numéro inférieur strictement à k et celle au $i-$ème tirage porte le numéro k. On a donc

$$R_i \cap B_{i,k} = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_{j,k}\right) \cap B_{i,k}.$$

□

c. Soit $j \in [\![1, i-2]\!]$. Sachant que l'on a déjà pioché j boules avec un numéro strictement inférieur à k, combien en reste-t-il ? Et combien reste-t-il de boules au total ?

En déduire que

$$P(R_i \cap B_{i,k}) = \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

Solution. Soit $j \in [\![1, i-2]\!]$. Sachant que l'on a déjà pioché j boules avec un numéro strictement inférieur à k, il reste $n-j$ boules dont $k-1-j$ avec un numéro strictement inférieur à k.
Appliquons la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(R_i \cap B_{i,k}) &= P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_{j,k}\right) \cap B_{i,k}\right) \\ &= P(A_{1,k})P_{A_{1,k}}(A_{2,k})P_{A_{1,k}\cap A_{2,k}}(A_{3,k})\dots P_{A_{1,k}\cap\dots\cap A_{i-2,k}}(A_{i-1,k})P_{A_{1,k}\cap\dots\cap A_{i-1,k}}(B_{i,k}) \\ &= \frac{k-1}{n} \times \frac{k-2}{n-1} \times \dots \times \frac{k-1-(i-2)}{n-(i-2)} \times \frac{1}{n-(i-1)} \end{aligned}$$

d'après la question précédente. Ainsi

$$P(R_i \cap B_{i,k}) = \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

□

d. Montrer alors que

$$P(R_i) = \frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}.$$

Solution. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(B_{i,1}, \dots, B_{i,n})$:

$$P(R_i) = \sum_{k=1}^{n} P(R_i \cap B_{i,k}) = \sum_{k=1}^{i-1} P(R_i \cap B_{i,k}) + \sum_{k=i}^{n} P(R_i \cap B_{i,k}) = 0 + \sum_{k=i}^{n} \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

Ensuite, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \frac{\frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!}}{\frac{n!}{i!(n-i)!}} = \frac{i!}{(i-1)!} \times \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}} = i \times \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

On en déduit que

$$P(R_i) = \frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}.$$

□

e. Justifier que

$$\sum_{k=i+1}^{n} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i}\right) = \binom{n}{i} - 1.$$

Solution. On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=i+1}^{n} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i}\right) = \binom{n}{i} - \binom{i}{i} = \binom{n}{i} - 1.$$

□

f. En déduire enfin que $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$.

Solution. La formule du triangle de Pascal entraîne alors que

$$\sum_{k=i+1}^{n} \binom{k-1}{i-1} = \binom{n}{i} - 1.$$

donc

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{k-1}{i-1} = \binom{n}{i} - 1 + \binom{i-1}{i-1} = \binom{n}{i}.$$

En divisant, on obtient donc

$$\sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = 1$$

et donc $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$. □

On vient donc de montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$: il y a une chance sur i qu'il y ait un record au $i-$ème tirage.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la *variable aléatoire* X_n qui compte le nombre de records, c'est à dire que X_n est une application :

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}.$$

L'évènement $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si il y a exactement k records.

4. Quel est l'ensemble des valeurs que prend X_n, noté $X_n(\Omega)$, et appelé *univers image*?

Solution. La première pioche est toujours un record, on en a donc au moins un. Et au maximum, toutes les pioches sont des records donc on en a n. Ainsi $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

□

5. Justifier que $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$.

Solution. L'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si et seulement si il y a un seul record si et seulement si la première boule tirée est la boule numérotée n (sinon, la pioche amenant la boule numérotée n serait un autre record). Il y a une chance sur n que ce soit le cas donc

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

□

6. a. Écrire l'événement $[X_n = n]$ en fonction des événements de la famille $(B_{i,k})_{1 \leq i,k \leq n}$.

Solution. L'événement $[X_n = n]$ est réalisé si et seulement si on a un record à chaque tirage si et seulement si on tire les boules dans l'ordre croissant des numéros. On a donc

$$[X_n = n] = \bigcap_{i=1}^{n} B_{i,i}.$$

□

b. En déduire $P(X_n = n)$.

Solution. La formule des probabilités composées entraîne alors que

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P(B_{1,1}) P_{B_{1,1}}(B_{2,2}) P_{B_{1,1} \cap B_{2,2}}(B_{3,3}) \dots P_{B_{1,1} \cap \dots \cap B_{i-1,i-1}}(B_{i,i}) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n-2} \times \dots \times 1 \end{aligned}$$

et donc $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n!}$. □

7. Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, notons E_i l'événement "les $i-1$ premiers tirages amènent des boules dont le numéro est strictement inférieur à n et la première boule tirée porte le plus grand numéro d'entre eux".

a. Justifier à l'aide d'arguments combinatoires que

$$P(E_i) = \frac{\binom{n-1}{i-1} \times (i-2)!}{\frac{n!}{(n-i+1)!}}$$

et en déduire que $P(E_i) = \dfrac{n-i+1}{n(i-1)}$.

Solution. Pour tirer $i-1$ boules dont le numéro est strictement inférieur à n et la première boule tirée porte le plus grand numéro d'entre eux, on peut :

- ✗ choisir les $i-1$ boules sans ordre mardi les $n-1$ boules n'étant pas la boule numérotée n (il y a $\binom{n-1}{i-1}$ façons),
- ✗ placer la plus grande d'entre elle en première position (il y a une seule façon),
- ✗ ranger les $i-2$ autres dans les $i-2$ places suivantes (il y a $(i-2)!$ façons.

En tout il y a $\dfrac{n!}{n-(i-1)}$ tirages successifs sans remise de $i-1$ boules donc, les tirages étant équiprobables,

$$P(E_i) = \frac{\binom{n-1}{i-1} \times (i-2)!}{\frac{n!}{(n-i+1)!}}.$$

Simplifions :

$$P(E_i) = \frac{\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \times (i-2)!}{\frac{n!}{(n-i+1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!} \times \frac{(i-2)!}{(i-1)} \frac{(n-i+1)!}{(n-i)}$$

et donc

$$P(E_i) = \frac{n-i+1}{n(i-1)}.$$

□

b. Justifier alors que

$$[X_n = 2] = \bigcup_{i=2}^{n} [E_i \cap B_{i,n}].$$

Solution. L'événement $[X_n = 2]$ est réalisé si et seulement on a exactement deux records si et seulement si on a un seul autre record que le premier (et c'est forcément en obtenant la boule numérotée n) si et seulement si il existe un instant de tirage où on obtient la boule numérotée n mais que avant cela, les boules ont un numéro inférieur strictement à celui de la première boule. Il est réalisé si et seulement si il existe un instant i tel que $E_i \cap B_{i,n}$ est réalisé. Ainsi

$$[X_n = 2] = \bigcup_{i=2}^{n} E_i \cap B_{i,n}.$$

□

c. En déduire que

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Solution. Les événements de l'union étant deux à deux incompatibles, on a

$$P(X_n = 2) = \sum_{i=2}^{n} P(E_i \cap B_{i,n}) = \sum_{i=2}^{n} P(E_i) P_{E_i}(B_{i,n}) = \sum_{i=2}^{n} \frac{n-i+1}{n(i-1)} \times \frac{1}{n-(i-1)}.$$

Le changement d'indice $j = i-1$ entraîne alors que

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

□

En général, on essaie de déterminer complètement la loi d'une variable aléatoire, c'est à dire qu'il faudrait déterminer, pour tout $k \in X_n(\Omega)$, la probabilité $P(X_n = k)$. Ici, on l'a fait pour trois valeurs. Le sujet n'en demande pas plus.