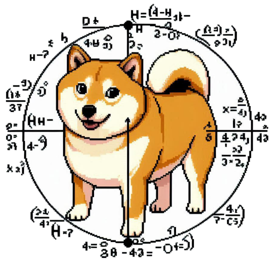
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Devoir maison n°7

Mars-Avril 2025

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$$
ainsi que les ensembles $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$ et $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

1. On se propose d'étudier les *extrema* locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
  a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis calculer les dérivées partielles de f en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$.
  b. Montrer que f possède dans $\mathbb{R}^2$ exactement deux points critiques.
  c. Préciser, en justifiant soigneusement, la nature de chacun de ces points critiques.

2. On se propose d'étudier maintenant la restriction de la fonction f à D.
  a. Justifier que f possède sur D un maximum global, noté M, et un minimum global, noté m.
  b. Montrer que M et m ne peuvent être atteints que sur ∂D.
  c. Déterminer la valeur de M ainsi que les points de ∂D en lesquels f atteint cette valeur.
  Indication : on pourra étudier avec profit la fonction $\varphi : x \mapsto 2x(2x^2-3)$ *sur* $[-1,1]$.

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, et on considère la réflexion f par rapport au plan $(P) : x+y=0$, et la réflexion g par rapport au plan $(Q) : y+z=0$.

1. **a.** Que peut-on dire **sans calcul** des deux endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$? On précisera pour chacun l'ensemble des vecteurs invariants.
  b. Justifier que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont réciproques l'un de l'autre.

2. **a.** Montrer que les matrices de f et de g relativement à la base B sont :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
  b. En déduire les éléments caractéristiques de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
  c. Déterminer les valeurs propres (complexes) de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

3. Plus généralement, on considère une rotation r de $\mathbb{R}^3$, d'axe (D) dirigé et orienté par un vecteur unitaire $\vec{a}$, et d'angle θ.

  a. Montrer que les valeurs propres de r dans $\mathbb{C}$ sont 1, $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
  b. Soit $\vec{u}$ un vecteur orthogonal à $\vec{a}$. Justifier que $r(\vec{u}) = (\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\,\vec{a} \wedge \vec{u}$.
  c. En déduire l'expression de l'image $r(\vec{v})$ d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ à l'aide de θ et des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{v}$ et $\vec{a} \wedge \vec{v}$.

Exercice 3 : Transformée de Fourier

On définie la *transformée de Fourier* de toute fonction **continue et intégrable** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
On rappelle qu'on a obtenu, dans l'**Exercice 16.9**, ainsi que dans le **Devoir Surveillé n°3** que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. **a**. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
c. Déterminer une expression explicite de $\hat{f}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 4

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le point $\Omega\,(1,0)$ et le cercle (C) de centre Ω et de rayon 1.

À tout point N de (C) on associe l'orthocentre H du triangle $O\Omega N$ (c'est à dire le point de concours des trois hauteurs de ce triangle), en posant $H=O$ dans le cas où $N=O$. On note Γ la courbe décrite par H lorsque N décrit (C).

1. Soit $N\in(C)$, et $u\in\,]-\pi,\pi]$ la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{\Omega N}\right)$.
a. Déterminer en fonction de u les coordonnées de N, et en déduire une équation de la hauteur issue de N dans le triangle $O\Omega N$.
b. Déterminer une équation de la hauteur issue de Ω dans le triangle $O\Omega N$.
c. En déduire que Γ peut être paramétrée (en prolongeant convenablement) par :

$$\begin{cases} x=1+\cos u\\ y=-\dfrac{\cos(u/2)}{\sin(u/2)}\cos u\end{cases}\quad \text{avec } u\in\,]-\pi,0[\,\cup\,]0,\pi]\,.$$

2. En faisant un changement de variable, montrer que Γ peut aussi être paramétrée (en prolongeant convenablement) par :

$$M\,(t):\begin{cases} x=\dfrac{2}{t^2+1}\\ y=\dfrac{t^2-1}{t\,(t^2+1)}\end{cases},t\in\mathbb{R}^*.$$

On considère la droite Δ_t passant par les points $M\,(t)$ et $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$ de Γ pour tout réel t non nul.

3. Montrer que l'enveloppe (E) de la famille des droites Δ_t est paramétrée par:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{4t^2}{(t^2+1)^2}\\ y=\dfrac{4t}{t^2+1}\end{cases},t\in\mathbb{R}^*$$

4. **a**. Montrer que (E) est contenue dans la courbe $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $y^2=-4x$.
b. Comment s'appelle la courbe $(\mathcal{P})$? On précisera ses éléments caractéristiques.
c. Préciser quelle partie de $(\mathcal{P})$ est égale à (E).
d. Représenter graphiquement l'allure de $(\mathcal{P})$.

Bonus* : Laplacien et fonctions radiales

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite *radiale* s'il existe $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad f(x) = \varphi(\|x\|),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
On rappelle que le *Laplacien* Δf de f est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

1. Soit f une telle fonction radiale. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\Delta f(x) = \varphi''(\|x\|) + \dfrac{n-1}{\|x\|}\varphi'(\|x\|)$.

On dit que f est *harmonique* si son Laplacien est nul, c'est à dire si $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$.

2. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ radiales et harmoniques.

3. Soient a_1, a_2, r_1, r_2 des réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, harmonique, telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \|(x,y)\| = r_1 \Longrightarrow f(x,y) = a_1 \\ \|(x,y)\| = r_2 \Longrightarrow f(x,y) = a_2 \end{array} \right. .$$