Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir surveillé n°1

Vendredi 13 Septembre
Durée : 4 heures

Ce devoir comporte cinq exercices indépendants.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Écrire sous forme développée P_1 et P_2 et donner leur factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $P_n = XQ_n$, où Q_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n n'admet que des racines simples.

4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines complexes de P_n (on les mettra sous forme exponentielle).

5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 2

On considère, dans cet exercice, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1. a. En étudiant les variations de la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$, montrer:

$$\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{4}.$$

b. En déduire : $\forall n \geqslant 1,\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \exp\left(1 - \dfrac{1}{4n}\right)$.

2. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \exp\left(-\dfrac{1}{4n}\right)$.

b. En considérant le produit $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n \leqslant \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$.

3. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

b. En déduire : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\ln(n)\right)$.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

Exercice 3

On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour $n\in\mathbb{N}^*$, par $S_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n+i}$.

1. a. Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$.

b. Écrire $\dbinom{2n}{n+i}$ comme un quotient de produits.

2. Informatique.

a. Écrire, en `Python`, une fonction récursive `produit_des_termes` qui prend en argument une liste `L` et renvoie le produit des termes de la liste.

b. En déduire une fonction `suite_S` qui prend en argument un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et renvoie la valeur de S_n.

3. Justifier que

$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}=2^{2n}.$$

4. En déduire que

$$S_n=2^{2n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

On commencera par montrer que

$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}+\binom{2n}{n}=2S_n.$$

5. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_p=\dbinom{2p}{p}2^{-2p}$.

a. Montrer que, pour tout entier $p\in\mathbb{N}^*$, $u_{p+1}=\dfrac{2p+1}{2p+2}u_p$.

b. En déduire, par récurrence, que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leq u_p\leq\frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

c. En déduire alors la limite de u_p lorsque $p\to+\infty$.

Exercice 4

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, telles que $h(0)=1$ et qui vérifient, pour tout réel x,

$$h(2x)=h(x)\cos(\pi x).$$

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et de $\sin(a)$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$\sin(\pi x)=2^n\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

3. Montrer que, pour toute solution h, tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x)=h\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x)$$

5. Pour tout réel x non nul, déterminer les valeurs de

$$\lim_{n\to+\infty}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\qquad\text{et}\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}.$$

6. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x, de $h(x)$ en fonction de x.

Exercice 5 ($*$)

On *rappelle* qu'une fonction f est dite **convexe** sur un intervalle I si pour tous $x_1, x_2 \in I$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in [0;1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

On admet dans la suite que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

1. L'objet de cette première question est de montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

i. f est convexe sur I ;
ii. Pour tout entier $n \geq 2$, f vérifie la condition (C_n) :
Pour tous $x_1, ..., x_n \in I$, pour tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0;1]$ tels que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

a. Montrer que : si, pour tout entier $n \geq 2$, f vérifie la condition (C_n), alors f est convexe.
b. Montrer l'implication réciproque par **récurrence** sur $n \geq 2$.
Pour l'hérédité, on pourra, en partant des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$, introduire les coefficients $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}$.

2. Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ...b_n$ des réels strictement positifs.

a. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}.$$

*On pourra utiliser la Question **1.** avec $x_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ et des coefficients λ_i bien choisis.*

b. Que devient l'inégalité si les réels $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ sont simplement supposés positifs ?

3. Soient m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ des réels positifs. Déduire de l'inégalité obtenue à la question précédente, que

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{i,j} a_{i,k}}.$$

4. **Application**. Soient m et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère n points du plan $M_1, ..., M_n$ deux à deux distincts et m droites $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_m$ deux à deux distinctes. On s'intéresse au nombre I d'incidences, c'est à dire au nombre de couples (i, j) dans $[\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$ tels que $M_i \in \mathcal{D}_j$.
Pour ce faire, on introduit les coefficients $a_{i,j}$ définis par

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } M_i \in \mathcal{D}_j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Justifier que, pour tous j, k tels que $j \neq k$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} a_{i,k} \leq 1$.
b. En déduire que

$$I \leq \sqrt{nm^2 + mn^2}.$$