Devoir surveillé n°3

Vendredi 22 Novembre
Durée : 4 heures

Ce devoir comporte deux exercices et un problème, tous indépendants.
La dernière page du sujet est à détacher et à rendre avec sa copie, une fois complétée.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Exercice 1 : Une courbe piriforme

Le plan euclidien étant rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé direct, on considère la courbe Γ paramétrée par $M : t \mapsto M(t)$, où $M(t)$ est le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \sin(t)\cos^3(t) \\ y(t) & = & \sin^2(t) \end{array} \right.$$

1. Vérifier que les fonctions coordonnées x et y sont $\pi-$périodiques.

2. Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera. Sur quel I intervalle est-il suffisant d'étudier M ?

3. **a**. Montrer que Γ présente un unique point singulier, dont on précisera les coordonnées, obtenu pour un certain paramètre $t_0 \in I$ que l'on précisera.
b. Montrer qu'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires que l'on explicitera tel que, au voisinage de $h = 0$, on a :

$$M(t_0 + h) = M(t_0) + h^2 \cdot \overrightarrow{u} + h^3 \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{o(h^3)}.$$

c. En déduire la nature du point singulier ainsi qu'un vecteur directeur de la tangente à Γ en ce point.

4. Préciser les points de Γ admettant une tangente horizontale et ceux admettant une tangente verticale.

5. Dresser le tableau donnant les variations conjointes des fonctions coordonnées de M sur I.

6. Tracer complètement et soigneusement Γ ainsi que les tangentes remarquables sur le quadrillage fourni en annexe que l'on détachera du sujet et glissera dans la copie. *On donne* $3\sqrt{3}/16 \simeq 0.325$.

7. Soient A le point de coordonnées $(0, 1)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$ dont le centre est noté Ω. Si P est un point mobile de $\mathcal{C}$, on note Q le projeté de P sur l'axe des abscisses.
Montrer que Γ est le lieu du point de (AQ) ayant la même ordonnée que P lorsque P décrit $\mathcal{C}$.
On commencera par vérifier que, si θ désigne l'angle $\left(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AP}\right)$, alors les coordonnées de P sont $\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta), \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))\right)$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice , on s'intéresse aux propriétés d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, vérifiant

$$f^2 = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right).$$

Soit p l'endomorphisme de E défini par $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que p est un projecteur.

2. Vérifier que : $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E;\ f(x) = x\}$.

3. Soit q le projecteur sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$. Exprimer q comme combinaison linéaire de f et de Id_E.

4. En déduire que : $E = \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$.

5. Dans cette question et dans cette question uniquement, on suppose que E est de dimension finie. En considérant une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$, montrer que f est diagonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale).

6. Montrer $pq = qp = 0$.

7. Montrer, en utilisant les résultats précédents que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$.

8. Montrer que f est un automorphisme de E.

9. La relation obtenue pour f^n est-elle encore valable pour $n = -1$? Et pour $n \in \mathbb{Z}$?

Problème

Partie 1 : Une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (W_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

1. Calculer W_0 et W_1.

2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$ et que (W_n) est décroissante.

4. À l'aide d'une intégration par parties et de la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

En déduire que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

5. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$.
En calculant $J_{n+1} - J_n$, montrer que la suite (J_n) est constante et préciser sa valeur.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

7. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$, lorsque $n \to +\infty$. Obtenir finalement que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}},\ n \to +\infty.$$

Partie 2 : L'intégrale de Gauss

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

8. Justifier rigoureusement la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

9. Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(1-x) \leq -x$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déduire de la question précédent que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

11. Montrer de même qu'on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$$

12. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\cos(u)$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

On **admet** que le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(u)$ permet d'obtenir : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n-2}$.
On a donc l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

13. À l'aide de la Question **7.** de la **Partie 1**, conclure quant à la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

●

Annexe : Quadrillage à rendre avec la copie