Devoir surveillé n°4

Vendredi 13 Décembre
Durée : 4 heures

Ce devoir comporte quatre exercices, tous indépendants.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Exercice 1 : Un calcul de $\zeta(2)$

On rappelle que pour un entier naturel n, la n-ième intégrale de Wallis est l'intégrale

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t.$$

Les propriétés suivantes des intégrales de Wallis, qu'on utilisera librement, ont été obtenues dans le **Devoir Surveillé n°3**.

- ✗ $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$ et $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
- ✗ $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, $n \to +\infty$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \ \mathrm{d}t$$

1. Déduire des rappels admis une relation entre I_{n+1} et I_n.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = n\left((2n-1)J_{n-1} - 2nJ_n\right)$$

3. En déduire que si l'on pose $Q_n = \dfrac{J_n}{I_n}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}$$

4. Justifier que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \leqslant \frac{\pi}{2} \sin x$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(I_n - I_{n+1}\right) = \frac{\pi^2}{4} \frac{I_n}{2n+2}$$

5. En déduire que (Q_n) converge vers 0.

6. Calculer Q_0 puis utiliser un télescopage pour montrer que :

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Une matrice carrée **non nulle** $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

1. a. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente, alors $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$. Quel est nécessairement le polynôme caractéristique de N ?
b. Une matrice nilpotente N est-elle diagonalisable ?

Dans la suite de cet exercice, on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices carrées d'ordre n dont les valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux.
Plus précisément, on a

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{D}_n \iff \mathrm{Sp}(M) = \{m_{i,i} : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

2. Justifier que $\mathcal{D}_n$ contient des matrices autres que la matrice nulle et qui ne sont pas diagonales.

3. Montrer que, si $M \in \mathcal{D}_n$ alors, pour tout réel α, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore élément de $\mathcal{D}_n$.

4. a. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Montrer que K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.
b. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

5. a. Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \text{ inversible} \quad \iff \quad (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$$

b. En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$. Cette matrice est-elle diagonalisable?

7. Pour tout t réel, on considère la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
b. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Dans **toute la suite** de l'exercice, on se place dans le cas où $n = 3$. On considère une matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note χ_M le polynôme caractéristique de M.

8. a. Exprimer $\det(M)$ en fonction de a, b, c, d, e et f.
b. Montrer qu'il existe une quantité $\gamma(M)$, que l'on exprimera en fonction de a, b, c, d, e et f telle que

$$\chi_M(X) = X^3 - \gamma(M)X - \det(M).$$

c. Montrer que $\gamma(M) = \det(M) = 0$ si et seulement si M est nilpotente.

9. a. On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.
b. En déduire que $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

10. Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Exercice 3

On s'intéresse à la série $\sum u_n$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$.

1. On note, pour tout $n \geq 1$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a. À l'aide de développements limités usuels, montrer que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

b. Montrer alors que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ.

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $]0, +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1, v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.

a. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis que :

$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n).$$

6. Démontrer alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}.$$

Exercice 4

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. **Étude pour un nombre fini de tirages.** Pour $n \geq 1$, on note B_n l'événement : "Les n premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boules noires". On note $u_n = P(B_n)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. Montrer que

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$$

2. **Étude à l'infini.** On note B_∞ l'évènement "l'expérience ne s'arrête jamais".

a. Montrer que $P(B_\infty) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b. Montrer que $-\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$. Conclure que $P(B_\infty) > 0$.