Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir surveillé n°5

Mercredi 15 Janvier
Durée : 2 heures

Ce devoir comporte deux exercices indépendants.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Exercice 1

On considère les deux séries entières

$$\sum_{n\geq 1} \ln(n)x^n, \qquad \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$$

et on note, lorsque cela a du sens, pour x réel,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n, \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n.$$

1. Déterminer les rayons de convergence, notés respectivement R_f et R_g des deux séries entières.

On note $R=\min(R_f,R_g)$.

2. Montrer que, pour tout $x\in]0,R[$, on a : $f(x)\geq \dfrac{x^3}{1-x}$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers R_f.

3. Déterminer, à l'aide d'un produit de Cauchy, l'expression, pour $x\in]-R_g,R_g[$, de $g(x)$.

4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$-1\leq \ln(n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq -\frac{1}{n}.$$

5. En déduire que, pour tout $x\in]-R,R[$, on a : $|f(x)-g(x)|\leq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|x|^n$.

6. Obtenir alors que, au voisinage de R_f, on a $f(x)\sim g(x)$, puis expliciter un équivalent simple de $f(x)$, lorsque x tend vers R_f.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $]-1;1[$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\alpha)$:

$$\left(1-t^2\right) y'' - \alpha t y' + \alpha y = 0.$$

1. Rappeler la structure de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_\alpha)$, préciser la dimension.

2. On suppose que $\alpha = 2$.
On suppose que y est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et développable en série entière; il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t \in]-R;R[, y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ a_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1} a_n$.

b. Montrer que $a_3 = 0$. En déduire que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$ par récurrence.

c. Montrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = -\dfrac{1}{2p-1} a_0$.

d. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{t^{2p}}{2p-1}$.

e. En remarquant que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2p-1} = -1 + t \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^{2p-1}}{2p-1},$$

et à l'aide d'une intégration terme à terme, en déduire que pour tout $t \in]-1;1[$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2p-1} = -1 + t \ln\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right).$$

f. En déduire une base de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_2)$.
On justifiera soigneusement que la famille $\left(t \mapsto t,\ t \mapsto -1 + t \ln \sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}\right)$ est libre.

3. On suppose que $\alpha = 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on définit :

$$\varphi(P) = \left(1 - X^2\right) P'' - 3XP'$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

d. Montrer que P est une solution polynomiale non nulle de $\mathcal{E}_3$ si et seulement si P est un vecteur propre de φ associée à la valeur propre $\lambda = -3$.

e. En déduire les seules solutions polynomiales de $\mathcal{E}_3$.

4. On suppose que $\alpha = 1$.
Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ en utilisant le changement de variable $t = \sin(x)$.