Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir surveillé n°5

Solution

Ce devoir comporte deux exercices indépendants.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Exercice 1

On considère les deux séries entières

$$\sum_{n\geq 1} \ln(n)x^n, \qquad \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$$

et on note, lorsque cela a du sens, pour x réel,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n, \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n.$$

1. Déterminer les rayons de convergence, notés respectivement R_f et R_g des deux séries entières.

Solution. Observons que les coefficients de ces séries entières sont tous positifs, et même strictement positifs pour $n\geq 2$. Par critère de d'Alembert, on a, pour $n\geq 2$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

donc $R_f=1$. Toujours avec le même critère, observant que

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{(n+1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1;$$

car, comme on sait que $\sum 1/k$ diverge, $(n+1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Ainsi, on a

$$R_f=R_g=1.$$

$\square$

On note $R = \min(R_f, R_g)$.
On a alors $R = R_f = R_g = 1$.

2. Montrer que, pour tout $x \in]0, R[$, on a : $f(x) \geq \dfrac{x^3}{1-x}$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers R_f.

Solution. Observons que, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n) \geq 0$ et pour $n \geq 3$, $\ln(n) \geq 1$. Il suit que, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{2} \ln(n) x^n + \sum_{n=3} \ln(n) x^n \geq \sum_{n=3} \ln(n) x^n \\ &\geq \sum_{n=3} x^n = x^3 \sum_{n=3} x^{n-3} = x^3 \sum_{n=0} x^n = \frac{x^3}{1-x}, \end{aligned}$$

comme demandé. On fait alors tendre $x \to 1$. Par algèbre des limites et comparaison, on a alors

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty.$$

□

3. Déterminer, à l'aide d'un produit de Cauchy, l'expression, pour $x \in]-R_g, R_g[$, de $g(x)$.

Solution. On suit l'indication du texte ; il s'agit donc d'interpréter la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$, comme le produit de Cauchy de deux séries entières. Observons alors simplement que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k}, \qquad \text{où on a posé : } \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \ a_j = 1.$$

Ceci permet de voir que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$ est le produit de Cauchy des deux séries entières usuelles

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} x^n$$

ayant toutes deux un rayon de convergence égal à 1. On a donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$g(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right) = -\ln(1-x) \cdot \frac{x}{1-x}.$$

Au final,

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad g(x) = \frac{-x \ln(1-x)}{1-x}.$$

□

4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 \leq \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq -\frac{1}{n}.$$

Solution. Cette inégalité est classique. Encore faut-il savoir la prendre correctement. L'inégalité est clairement vérifiée pour $n = 1$. Observons que, pour tout $n \geq 2$, on a, par télescopage,

$$\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n}.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $[k, k+1]$ (la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle rendant licite l'utilisation du théorème), on a $f'(x) = 1/x$ qui atteint son maximum sur $[k, k+1]$ en k. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

ce qui donne, par passage à la limite

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n} \leq -\frac{1}{n}$$

ou encore, une fois de plus par télescopage pour la somme de gauche,

$$-1 \leq \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq -\frac{1}{n},$$

ce qu'on voulait. □

5. En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[$, on a : $|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x|^n$.

Solution. Par combinaison linéaire de série entières de même rayon de convergence, on a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) - g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n.$$

Observons que la question précédente donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right| \leq 1.$$

Par inégalité triangulaire et la question précédente donc, on a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right| |x|^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x|^n.$$

□

6. Obtenir alors que, au voisinage de R_f, on a $f(x) \sim g(x)$, puis expliciter un équivalent simple de $f(x)$, lorsque x tend vers R_f.

Solution. L'inégalité obtenue ci-dessus se complète en : pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1 - |x|}.$$

Mais on connait l'expression de $g(x)$ (et donc de $|g(x)|$), pour $x \in]0, 1[$ (on cherche une limite en 1, on considère donc des valeurs positives de x). Ainsi

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| \leq \frac{x}{1-x} \times \frac{1-x}{-x \ln(1-x)} = \frac{-1}{\ln(1-x)} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0$ ou encore $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ce qui donne bien

$$f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} g(x) = \frac{-x \ln(1-x)}{1-x}.$$

□

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $]-1; 1[$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\alpha)$:

$$\left(1 - t^2\right) y'' - \alpha t y' + \alpha y = 0.$$

1. Rappeler la structure de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_\alpha)$, préciser la dimension.

Solution. Comme $t \mapsto 1 - t^2$ ne s'annule pas sur $]-1, 1[$, d'après un théorème du cours (on renvoie au **Théorème 11.10**, page 6, du **Chapitre 11**), l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 notée $(\mathcal{E}_\alpha)$ est un espace vectoriel de dimension 2. □

2. On suppose que $\alpha = 2$.
On suppose que y est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et développable en série entière, il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t \in]-R; R[, y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1} a_n$.

Solution. On suppose donc qu'il existe une suite de coefficients réels (a_n) et $R > 0$ tels que, pour tout $t \in]-R, R[$, $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Mais alors, y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout $t \in]-R, R[$, on a

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}t^n, \qquad \text{et} \qquad y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n.$$

On injecte dans $(\mathcal{E}_2)$.

$$\begin{aligned}
0 &= (1-t^2)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - 2t\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty}2(n+1)a_{n+1}t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}2a_nt^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)na_nt^n - \sum_{n=1}^{+\infty}2na_nt^n + \sum_{n=0}^{+\infty}2a_nt^n \\
&= 2a_2 + 2a_0 + 6a_3t + \sum_{n=2}^{+\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)na_n - 2na_n + 2a_n\right)t^n \\
&= 2a_2 + 2a_0 + 6a_3t + \sum_{n=2}^{+\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2+n-2)a_n\right)t^n \\
&= 2a_2 + 2a_0 + 6a_3t + \sum_{n=2}^{+\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)(n+2)a_n\right)t^n
\end{aligned}$$

Par identification, il suit que, pour tout $n \geq 2$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)(n+2)a_n = 0 \iff a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1}a_n.$$

On a aussi $a_3 = 0$ et $2a_2 + 2a_0 = 0$ donc $a_2 = -a_0$, ce qui étend la relation à $n = 0$. □

b. Montrer que $a_3 = 0$. En déduire que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$ par récurrence.

Solution. On procède par récurrence comme demandé.

- ✗ L'identification réalisée dans la question précédente assure que $a_3 = 0$. La propriété est alors vraie pour $p = 1$.
- ✗ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons alors que $a_{2p+1} = 0$. D'après la relation de récurrence obtenue à la question précédente, on a
$$a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = \frac{2p+1-1}{2p+1+1}a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+2} \times 0 = 0,$$
ce qui termine cette récurrence très facile.

□

c. Montrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = -\frac{1}{2p-1}a_0$.

Solution. C'est encore une récurrence facile.

- ✗ Pour $p = 0$, c'est immédiatement vérifié : $a_0 = -(-a_0)$.
- ✗ Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_{2p} = -\frac{1}{2p-1}a_0$. Alors, par la relation de récurrence obtenue ci-avant (qui est valide car $2p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$), on a
$$a_{2p+2} = \frac{2p-1}{2p+1} \times \left(-\frac{1}{2p-1}\right)a_0 = -\frac{1}{2p+1}a_0,$$
ce qui est bien la formule au rang $p+1$ et termine la récurrence.

□

d. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geqslant 0} \frac{t^{2p}}{2p-1}$.

Solution. Attention, cette série entière est lacunaire ; on doit faire attention en appliquant le critère de d'Alembert.
Notons $u_p(t) = \dfrac{t^{2p}}{2p-1}$.
On a
$$\left|\frac{u_{p+1}(t)}{u_p(t)}\right| = \left|\frac{2p-1}{2p+1}t^2\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} t^2.$$
Ainsi, si $|t|<1$, la série est convergente et si $|t|>1$ elle diverge, par critère de d'Alembert. On en conclut donc que $R=1$. $\square$

e. En remarquant que :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2p-1} = -1 + t\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^{2p-1}}{2p-1},$$
et à l'aide d'une intégration terme à terme, en déduire que pour tout $t \in]-1;1[$
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2p-1} = -1 + t\ln\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right).$$

Solution. Afin d'obtenir la formule suggérée, il suffit de sortir le premier terme de la somme (pour $p=0$) et de factoriser par t dans tous les termes pour $p \geq 1$.
On observe ensuite que, pour $p \geq 1$,
$$\frac{t^{2p-1}}{2p-1} = \int_0^t x^{2p-2}\mathrm{d}x.$$
Le théorème d'intégration terme à terme permet alors d'affirmer que, pour tout $t \in]-1,1[$, on a
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^{2p-1}}{2p-1} = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^t x^{2p-2}\mathrm{d}x = \int_0^t \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p-2}\mathrm{d}x = \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}.$$
Il s'agit alors d'intégrer la quantité précédente, ce qu'on fait à l'aide d'une décomposition en éléments simples :
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$
Ceci donne
$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-t) + \ln(1+x)\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right).$$
Au final, on a bien que pour tout $t \in]-1;1[$
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2p-1} = -1 + t\ln\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right).$$
$\square$

f. En déduire une base de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_2)$.
On justifiera soigneusement que la famille $\left(t\mapsto t,\ t\mapsto -1+t\ln\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}\right)$ est libre.

Solution. Faisons la synthèse de la recherche de solutions développables en série entière.
Si y est solution de $(\mathcal{E}_2)$, alors, pour tout $t \in]-1,1[$, il existe deux réels a_0, a_1 tels que
$$y(t) = a_1 t - a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2p-1} = a_1 t - a_0\left(-1 + t\ln\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)\right).$$
Réciproquement, il est clair que, pour tous réels a_0, a_1, une telle fonction y est bien solution de $(\mathcal{E}_2)$. Ainsi, notant $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solution de $(\mathcal{E}_2)$ qu'on sait être un espace vectoriel de dimension 2, on a
$$\mathrm{Vect}\left(t\mapsto t,\ t\mapsto -1+t\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right) \subset \mathcal{S}_2.$$

Il est facile de montrer que la famille génératrice ci-dessus est aussi libre. En effet, si

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad a_1 t - a_0\left(-1 + t\ln\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)\right) = 0,$$

alors en évaluant en $t=0$, on a $a_0 = 0$, ce qui donne ensuite $a_1 t = 0$ pour tout $t \in]-1,1[$, ce qui n'est possible que si $a_1 = 0$. La famille est bien libre et engendre donc un espace vectoriel de dimension 2. Comme on sait déjà que $\dim(\mathcal{S}_2) = 2$, il suit qu'on a égalité :

$$\mathrm{Vect}\left(t \mapsto t,\ t \mapsto -1 + t\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right) = \mathcal{S}_2.$$

□

3. On suppose que $\alpha = 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on définit :

$$\varphi(P) = \left(1 - X^2\right)P'' - 3XP'$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. Il s'agit de montrer que φ est bien linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

✗ Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q) &= \left(1 - X^2\right)(\lambda P + \mu Q)'' - 3X(\lambda P + \mu Q)' \\
&= \left(1 - X^2\right)(\lambda P'' + \mu Q'') - 3X(\lambda P' + \mu Q') \\
&= \lambda\left(\left(1 - X^2\right)P'' - 3XP'\right) + \mu\left(\left(1 - X^2\right)Q'' - 3XQ'\right) \\
&= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien linéaire.

✗ On pourrait raisonner sur le degré de $\varphi(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ mais on choisit une approche qui nous permettra de répondre plus rapidement à la question suivante. On calcule les images des images par φ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 0 \\
\varphi(X) &= -3X \\
\varphi(X^2) &= 2(1 - X^2) - 3X(2X) \\
&= 2 - 8X^2 \\
\varphi(X^k) &= (1 - X^2)(k(k-1)X^{k-2}) - 3X(kX^{k-1}) \\
&= k(k-1)X^{k-2} - (k(k-1) + 3k)X^k = k(k-1)X^{k-2} - k(k+2)X^k
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Par linéarité de φ, il suit que

$$\varphi(R_n[X]) \subset \mathrm{Vect}(\varphi(1), ..., \varphi(X^n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$$

et φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

On a bien montré que φ était un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. □

b. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. Les calculs faits à la question précédente nous permettent de répondre immédiatement que

$$A = \mathrm{Mat}(\varphi,\ \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\
0 & -3 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & -8 & .... & 0 \\
\vdots & & \ddots & & n(n-1) \\
\vdots & & \ddots & & 0 \\
\vdots & & \dots & & -n(n+2)
\end{pmatrix}$$

□

c. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution. La matrice de φ (dans la base canonique) est triangulaire ; ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. On a donc

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-k(k+2) : \ k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}\}.$$

La fonction $x \mapsto -x(x+2)$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ elle est injective, les valeurs propres ci-dessus sont deux à deux distinctes. Ce qui fait donc $n+1$ valeurs propres distinctes (en dimension $n+1$) : φ est bien diagonalisable. □

d. Montrer que P est une solution polynomiale non nulle de $\mathcal{E}_3$ si et seulement si P est un vecteur propre de φ associée à la valeur propre $\lambda = -3$.

Solution. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Alors

$$\begin{aligned} P \text{ est solution de } (\mathcal{E}_3) &\iff \left(1 - X^2\right) P'' - 3XP' + 3P = 0 \\ &\iff \left(1 - X^2\right) P'' - 3XP' = -3P \\ &\iff \varphi(P) = -3P \\ &\iff P \text{ est vecteur propre de } \varphi \text{ associé à la valeur propre } -3 \end{aligned}$$

□

e. En déduire les seules solutions polynomiales de $\mathcal{E}_3$.

Solution. Le sous-espace propre associé à -3 est de dimension 1 et engendré par X. D'après la question précédente, les seuls solutions polynomiales de $(\mathcal{E}_3)$ sont de la forme

$$P = \lambda X, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

4. On suppose que $\alpha = 1$.
Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ en utilisant le changement de variable $t = \sin(x)$.

Solution. On veut résoudre l'équation différentielle (homogène)

$$(\mathcal{E}_1) \qquad\qquad (1-t^2)y'' - ty' + y = 0.$$

On nous suggère le changement de variable $t = \sin(x)$. On pose alors $z(x) = y(t) = y(\sin(x))$. La fonction sin est $\mathcal{C}^2$ et strictement croissante (donc bijective) sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (à valeurs dans $[-1, 1]$). Sa bijection réciproque arcsin est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1[$. Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a

- ✗ $z'(x) = \cos(x)y'(\sin(x))$
- ✗ $z''(x) = -\sin(x)y'(\sin(x)) + \cos^2(x)y''(\sin(x))$.

On injecte dans (E_1): la fonction y est solution de $(\mathcal{E}_1)$ si et seulement si, pour tout $t = \sin(x) \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} (1-t^2)y'' - ty' + y = 0 &\iff (1 - \sin^2(x))y''(\sin(x)) - \sin(x)y'(\sin(x)) + y(\sin(x)) = 0 \\ &\iff \cos^2(x)y''(\sin(x)) - \sin(x)y'(\sin(x)) + y(\sin(x)) = 0 \\ &\iff z''(x) + z(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, z est solution, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de $z'' + z = 0$, équation différentielle linéaire (homogène) d'ordre 2 qu'on sait résoudre (*via* calcul de l'équation caractéristique). Il existe alors $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$z(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

Les solutions y de $(\mathcal{E}_1)$ sur $]-1, 1[$ sont de la forme

$$y(t) = z(\arcsin(t)) = A\cos(\arcsin(t)) + B\sin(\arcsin(t)) = A\sqrt{1-t^2} + Bt,$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.
(Pour $t \in]-1, 1[$, on a $\arcsin(t) \in]-\pi/2, \pi/2[$ et donc $\cos(\arcsin(t)) \geq 0$.) □

●