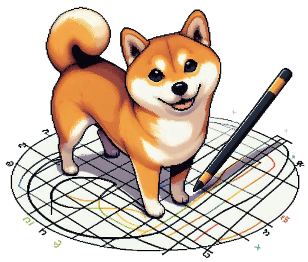

Devoir surveillé n°7

Vendredi 4 Avril
Durée : 3 heures

Ce devoir comporte un unique problème, en deux parties **indépendantes.**
La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Dans tout le problème, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni se sa structure euclidienne canonique et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Questions de cours

1. Soit Σ une surface dont un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ est $(u, v) \mapsto M(u, v)$. Donner la définition d'un point régulier de Σ.

2. **a.** Donner la définition d'une matrice carrée Q orthogonale.
b. Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles sont les natures possibles de l'endomorphisme canoniquement associé à Q ? Quels calculs peut-on effectuer pour distinguer ces différentes natures? Préciser le lien entre le résultat des calculs et la nature. (On ne demande pas les éléments caractéristiques.)

Partie I - Deux surfaces de l'espace

On considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = (y - 2\sqrt{2}x)y$$

ainsi que la surface Σ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}uv \\ y = (u+v)^2 \\ z = \left(u^2 - v^2\right)^2 \end{cases} \quad , (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

On note $M(u, v)$ le point de Σ de paramètres u et v.

3. **À propos de S.**

a. Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$? Qu'en déduit-on pour S ?
b. Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$?
c. *i.* Quelle est la nature de l'intersection Λ_γ de S avec un plan d'équation $z = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$? Distinguer différents cas suivant les valeurs de γ.
ii. On note O_γ le point de coordonnées $(0, 0, \gamma)$.
Tracer, sur le quadrillage ci-joint, les courbes Λ_γ dans le repère $\left(O_\gamma; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ pour $\gamma \in \{-2, 0, 1\}$.
On a choisi de confondre les points O_γ pour tracer les 3 courbes dans le même repère.

d. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en un point M_0 de S de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Cette équation ne devra pas dépendre de z_0.

e. Dans le cas particulier où M_0 est le point O, préciser la position relative de S et du plan tangent.

4. Comparaison entre S et Σ.

a. Vérifier que $\Sigma \subset S$.

b. A-t-on $\Sigma = S$?

5. À propos de Σ.

a. Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points **non réguliers** de Σ.

b. Soit $M(u,v)$ un point régulier de Σ. Déterminer, en fonction des paramètres u et v, une équation cartésienne du plan tangent à Σ au point $M(u,v)$.

Partie II - Une courbe de l'espace

On considère la courbe de $\mathbb{R}^3$, paramétrée par :

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}t^2 \\ t^2 \\ 9t^4 \end{pmatrix}.$$

6. On considère les vecteurs $\vec{w} = \dfrac{1}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\vec{j}$ et $\vec{u} = \vec{k}$.

a. Déterminer un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

b. Écrire la matrice de passage Q_1 de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et la matrice de passage Q_2 de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Les coordonnées d'un point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont notées (x, y, z) et ses coordonnées dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont notées (x_1, y_1, z_1).

Quelle relation existe-t-il entre la matrice Q_1 et les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$?

8. En déduire une représentation paramétrique de Γ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

9. Quelle est la nature de Γ ? (On pourra poser $\tau = t^2$).

Annexe : Quadrillage à rendre avec la copie

Nom, Prénom :