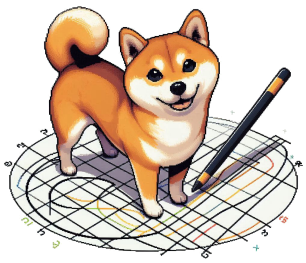


Devoir surveillé n°7

Solution

Ce sujet provient de la session 2016.
Cette solution reprend en grande partie celle du site internet d'Antoine Cristofari.

Dans tout le problème, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni se sa structure euclidienne canonique et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Questions de cours

1. Soit Σ une surface dont un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ est $(u, v) \mapsto M(u, v)$. Donner la définition d'un point régulier de Σ.

Solution. Un point $M(u_0, v_0)$ de la surface paramétrée est régulier si la famille $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u_0, v_0) n \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est libre. □

2. a. Donner la définition d'une matrice carrée Q orthogonale.

Solution. Une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M \cdot M^\top = I_n$. □

b. Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles sont les natures possibles de l'endomorphisme canoniquement associé à Q ? Quels calculs peut-on effectuer pour distinguer ces différentes natures? Préciser le lien entre le résultat des calculs et la nature. (On ne demande pas les éléments caractéristiques.)

Solution. Une matrice $Q \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ peut être associée à une rotation (y inclus un demi-tour et l'identité), une réflexion et une rotation-réflexion (y inclus $-\mathrm{Id}$).
Le calcul de la dimension du sous-espace propre associé à 1 caractérise la nature de l'isométrie :

- ✗ Si 1 n'est pas valeur propre, c'est une rotation réflexion (ou $-\mathrm{Id}$) ;
- ✗ Si $\dim E_1 = 1$, c'est une rotation (ou un demi-tour) ; ce sera alors un demi-tour si et seulement si la matrice est symétrique.
- ✗ Si $\dim E_1 = 2$, c'est une réflexion (la matrice est dans ce cas symétrique) ;
- ✗ Si $\dim E_1 = 3$, c'est l'identité (assimilée à une rotation).

□

Partie I - Deux surfaces de l'espace

On considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = (y - 2\sqrt{2}x)y$$

ainsi que la surface Σ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}uv \\ y = (u+v)^2 \\ z = \left(u^2 - v^2\right)^2 \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

On note $M(u,v)$ le point de Σ de paramètres u et v.

3. À propos de S.

a. Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$? Qu'en déduit-on pour S ?

Solution. L'intersection de S et du plan d'équation $y = \alpha$ a pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} z = (y - 2\sqrt{2}x)y \\ y = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} z = \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha x \\ y = \alpha \end{cases}$$

c'est donc une droite. Réciproquement, tout point de S de coordonnées (x,y,z) est sur la droite correspondant à $\alpha = y$. S est la réunion de ces diverses droites, c'est donc une surface réglée. □

b. Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$?

Solution. L'intersection de S et du plan d'équation $x = \beta$ a pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} z = (y - 2\sqrt{2}x)y \\ x = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} z = y^2 - 2\sqrt{2}\beta y \\ x = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} z + 2\beta^2 = \left(y - \sqrt{2}\beta\right)^2 \\ x = \beta \end{cases}$$

c'est donc une parabole du plan d'équation $x = \beta$. □

c. *i.* Quelle est la nature de l'intersection Λ_γ de S avec un plan d'équation $z = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$? Distinguer différents cas suivant les valeurs de γ.

Solution. Λ_γ a pour système d'équations cartésiennes

$$\Lambda_\gamma : \begin{cases} (y - 2\sqrt{2}x)y = \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

Pour étudier la conique d'équation $(y - 2\sqrt{2}x)y = \gamma$ on réduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ de la partie quadratique : ses valeurs propres ont pour somme $1 = \mathrm{tr}(A)$ et pour produit $-2 = \det(A)$, ce sont donc 2 et -1. On détermine des vecteurs propres associés en vue du tracé : on obtient facilement

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre 2 , et donc

$$\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre -1.
Dans le repère $\left(O_\gamma; \vec{I}, \vec{J}\right)$, l'équation de la conique est donc $2X^2 - Y^2 = \gamma$, et il s'agit :

- ✗ d'une hyperbole d'axe focal $\left(O_\gamma, \vec{I}\right)$ si $\gamma > 0$;
- ✗ d'une hyperbole d'axe focal $\left(O_\gamma, \vec{J}\right)$ si $\gamma < 0$;
- ✗ de la réunion des droites Δ_1 et Δ_2 d'équation

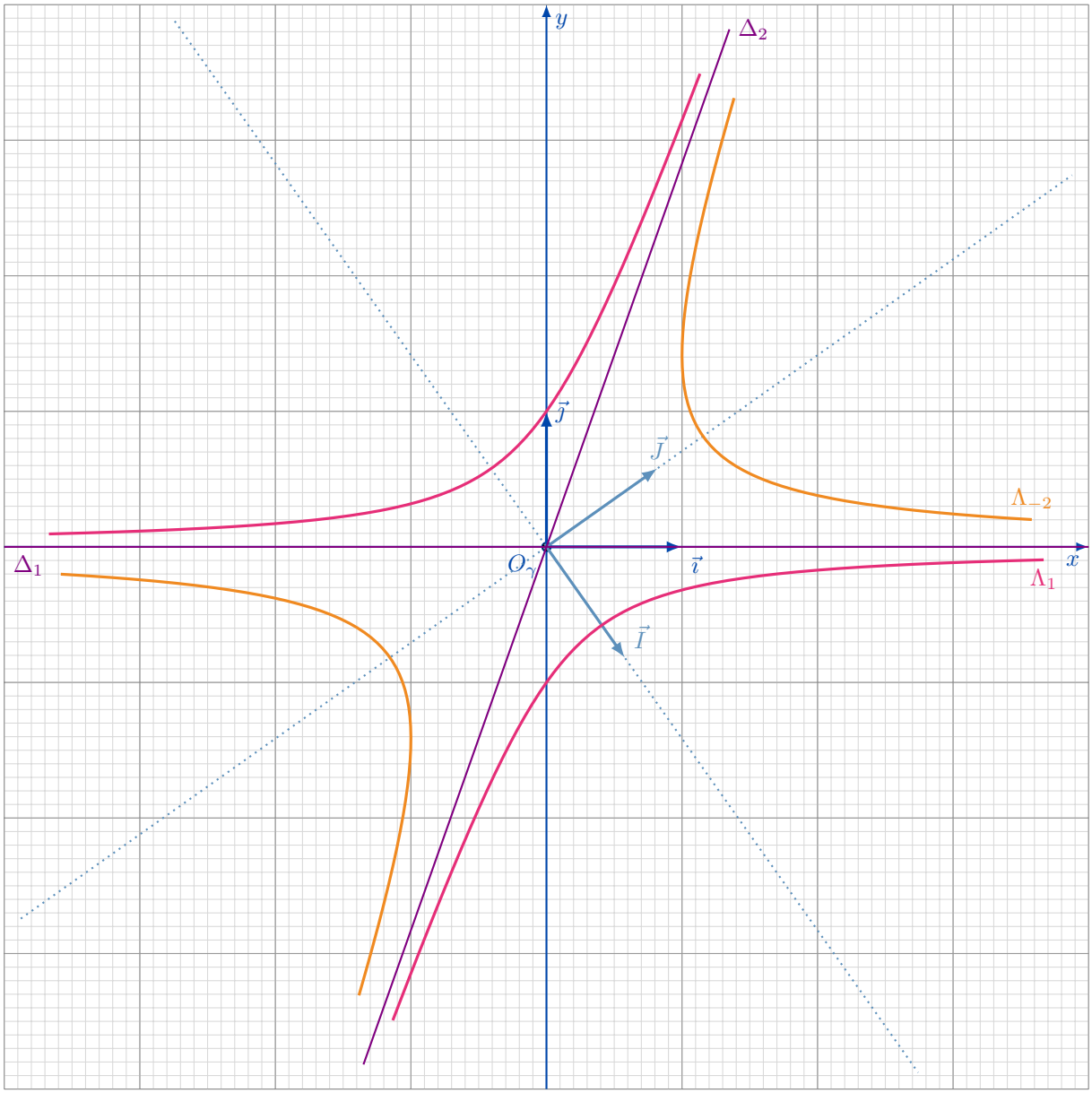
$$\Delta_1 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta_2 : \begin{cases} y = 2\sqrt{2}x \\ z = 0 \end{cases}$$

si $\gamma = 0$.

□

ii. On note O_γ le point de coordonnées $(0,0,\gamma)$. Tracer, sur le quadrillage ci-joint, les courbes Λ_γ dans le repère $\left(O_\gamma;\vec{i},\vec{j}\right)$ pour $\gamma \in \{-2,0,1\}$.
On a choisi de confondre les points O_γ pour tracer les 3 courbes dans le même repère.

Solution. On trace sur une même figure les trois coniques obtenues précédemment.



□

d. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en un point M_0 de S de coordonnées (x_0,y_0,z_0). Cette équation ne devra pas dépendre de z_0.

Solution. Posons $F(x,y,z) = (y-2\sqrt{2}x)y - z$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et on a

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad \vec{\nabla}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y \\ 2y-2\sqrt{2}x \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc une équation cartésienne du plan tangent à S en M_0 (dont les coordonnées vérifient l'équation de S) est

$$\begin{aligned} & (x-x_0)\left(-2\sqrt{2}y_0\right) + (y-y_0)\left(2y_0-2\sqrt{2}x_0\right) + (z-z_0)(-1) = 0 \\ \iff\ & -2\sqrt{2}y_0x + 2\left(y_0-\sqrt{2}x_0\right)y - z = 2y_0^2 - 4\sqrt{2}x_0y_0 - z_0 \\ \iff\ & -2\sqrt{2}y_0x + 2\left(y_0-\sqrt{2}x_0\right)y - z = 2y_0^2 - 4\sqrt{2}x_0y_0 - \left(y_0^2 - 2\sqrt{2}x_0y_0\right) \\ \iff\ & 2\sqrt{2}y_0x + 2\left(\sqrt{2}x_0-y_0\right)y + z = 2\sqrt{2}x_0y_0 - y_0^2 \end{aligned}.$$

□

e. Dans le cas particulier où M_0 est le point O, préciser la position relative de S et du plan tangent.

Solution. Pour $M_0 = O$, le plan tangent à S en M_0 est le plan d'équation $z = 0$. On sait déjà que l'intersection de S et de ce plan tangent est la réunion des droites Δ_1 et Δ_2.
Comme l'équation de S est $z = (y - 2\sqrt{2}x)y$, la position de S par rapport au plan d'équation $z = 0$ est donnée par le signe de $(y - 2\sqrt{2}x)y$.
Celui-ci est strictement positif sur la réunion des deux quarts de plan (délimités par Δ_1 et Δ_2) d'équations $\begin{cases} y > 0 \\ y > 2\sqrt{2}x \end{cases}$ et $\begin{cases} y < 0 \\ y < 2\sqrt{2}x \end{cases}$ et il est strictement négatif sur la réunion des deux quarts de plan d'équations $\begin{cases} y > 0 \\ y < 2\sqrt{2}x \end{cases}$ et $\begin{cases} y < 0 \\ y > 2\sqrt{2}x \end{cases}$.
Par conséquent, O est un point selle de S. □

4. Comparaison entre S et Σ.

a. Vérifier que $\Sigma \subset S$.

Solution. Soit $M(u, v)$ un point de Σ, et (x, y, z) ses coordonnées. On a

$$(y - 2\sqrt{2}x)y = \left((u+v)^2 - 4uv\right)(u+v)^2 = (u-v)^2(u+v)^2 = \left(u^2 - v^2\right)^2 = z$$

donc $M(u, v) \in S$. □

b. A-t-on $\Sigma = S$?

Solution. La réponse est négative : $\Sigma \neq S$. En effet, on a montré que S rencontre le plan d'équation $z = -2$ (c'est l'hyperbole Λ_{-2}). Or, tous les points de Σ ont leur troisième composante z positive ou nulle ; un point de Λ_{-2} est donc dans S mais pas dans Σ. □

5. À propos de Σ.

a. Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points non réguliers de Σ.

Solution. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}v \\ 2(u+v) \\ 4u\left(u^2 - v^2\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}u \\ 2(u+v) \\ -4v\left(u^2 - v^2\right) \end{pmatrix}$$

Leur produit vectoriel est

$$\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -8(u+v)^2\left(u^2 - v^2\right) \\ 4\sqrt{2}\left(u^2 + v^2\right)\left(u^2 - v^2\right) \\ -2\sqrt{2}\left(u^2 - v^2\right) \end{pmatrix} = -2\sqrt{2}\left(u^2 - v^2\right)\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}(u+v)^2 \\ -2\left(u^2 + v^2\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $u^2 - v^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $u = v$ ou $u = -v$.
L'ensemble des points non réguliers de Σ est donc la réunion des deux courbes paramétrées

$$u \longmapsto M(u, u) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}u^2 \\ 4u^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u \longmapsto M(u, -u) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}u^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La première est la demi-droite d'équations $\begin{cases} y = 2\sqrt{2}x \\ z = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ et la seconde la demi-droite d'équations $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$ qui sont respectivement incluses dans Δ_2 et Δ_1. □

b. Soit $M(u, v)$ un point régulier de Σ. Déterminer, en fonction des paramètres u et v, une équation cartésienne du plan tangent à Σ au point $M(u, v)$.

Solution. Il s'agit du plan passant par $M(u,v)$ et de vecteur normal $\vec{\omega}$, il admet donc pour équation cartésienne

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x-\sqrt{2}uv \\ y-(u+v)^2 \\ z-\left(u^2-v^2\right)^2 \end{pmatrix}\cdot\vec{\omega}=0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\vec{\omega}=\begin{pmatrix} \sqrt{2}uv \\ (u+v)^2 \\ \left(u^2-v^2\right)^2 \end{pmatrix}\cdot\vec{\omega} \\
&\iff 2\sqrt{2}(u+v)^2x-2\left(u^2+v^2\right)y+z=4(u+v)^2uv-2(u+v)^2\left(u^2+v^2\right)+\left(u^2-v^2\right)^2 \\
&\iff 2\sqrt{2}(u+v)^2x-2\left(u^2+v^2\right)y+z=-\left(u^2-v^2\right)^2.
\end{aligned}$$

On retrouve l'équation obtenue à la Question **1.d.** en remplaçant M_0 par $M(u,v)$. □

Partie II - Une courbe de l'espace

On considère la courbe de $\mathbb{R}^3$, paramétrée par :

$$\Gamma:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}^3, t\mapsto\begin{pmatrix} -2\sqrt{2}t^2 \\ t^2 \\ 9t^4 \end{pmatrix}.$$

6. On considère les vecteurs $\vec{w}=\dfrac{1}{3}\vec{\imath}+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\vec{\jmath}$ et $\vec{u}=\vec{k}$.

a. Déterminer un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Solution. Par propriété du déterminant

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \text{ b.o.n} \iff (\vec{w},\vec{u},\vec{v}) \text{ b.o.n}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ étant unitaires, par propriétés du cours concernant le produit vectoriel, il suffit alors de prendre

$$\vec{v}=\vec{w}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2\sqrt{2}/3 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{\imath}-\frac{1}{3}\vec{\jmath}.$$

□

b. Écrire la matrice de passage Q_1 de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et la matrice de passage Q_2 de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ à la base $(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$.

Solution. Il suffit d'écrire les matrices dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs des nouvelles bases dans la base canonique. On trouve

$$Q_1=\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad Q_2=\begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Il s'agit de la matrice Q_2 obtenue ci-dessus qui est donc orthogonale car la famille $(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$ est orthonormée. Celle-ci étant de plus symétrique, c'est une symétrie orthogonale. Un calcul de son déterminant, égal à -1 nous permet de conclure qu'il s'agit d'une réflexion.
On détermine le plan de la symétrie en déterminant le sous-espace propre associé à 1.

$$\begin{aligned}
X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in E_1(Q_2) \quad &\iff \quad AX=X \iff \begin{cases} -x+\sqrt{2}y &= 0 \\ \sqrt{2}x-2y &= 0 \end{cases} \\
&\iff \quad x=\sqrt{2}y
\end{aligned}$$

Ainsi, l'endomorphisme associé à cette matrice est la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}=\mathrm{Vect}((\sqrt{2},1,0),(0,0,1))$ (dont une équation est $x-\sqrt{2}y=0$).

□

d. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. On reconnait Q_1 qui est donc orthogonale et de déterminant 1 car la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe. C'est donc la matrice d'une rotation r. L'angle θ de celle-ci vérifie

$$1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(Q_1) = -\frac{1}{3} \iff \cos(\theta) = -\frac{-2}{3} \iff \theta = \pm \arccos\left(-\frac{-2}{3}\right).$$

On trouve l'axe de cette rotation avec le sous-espace associé à 1.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(Q_1) \iff AX = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -3x + 2\sqrt{2}y + z & = & 0 \\ -4y + 2\sqrt{2}z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff x = z = \sqrt{2}y$$

Ainsi, il s'agit d'une rotation autour de $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\,(\vec{a})$, où on a choisi d'orienter $\mathcal{D}$ avec $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Cette orientation permet d'obtenir précisément θ. En effet, $\sin(\theta)$ vérifie

$$\sin(\theta) = \det\,(\vec{a}, \vec{\imath}, r(\vec{\imath})) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} < 0$$

Ainsi, r est la rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\vec{a}$ et d'angle $\theta = -\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$. □

7. Les coordonnées d'un point M dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont notées (x, y, z) et ses coordonnées dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont notées (x_1, y_1, z_1).

Quelle relation existe-t-il entre la matrice Q_1 et les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$?

Solution. La formule de changement de base est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = Q_1^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. □

8. En déduire une représentation paramétrique de Γ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Solution. On applique la formule ci-dessus. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = Q_1^\top \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}t^2 \\ t^2 \\ 9t^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9t^4 \\ -3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans la base considérée, une représentation paramétrique est donnée par la fonction $\Gamma_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} 9t^4 \\ -3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

9. Quelle est la nature de Γ ? (On pourra poser $\tau = t^2$).

Solution. En posant $\tau = t^2$ qui parcourt $\mathbb{R}_+$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, on a Γ paramétrée par $\tau \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{pmatrix} 9\tau^2 \\ -3\tau \end{pmatrix}$.

Il s'agit de l'arc de la parabole d'équations $\left\{ \begin{array}{l} x' = y'^2 \\ z' = 0 \end{array} \right.$ correspondant à $y' < 0$ □