Math PT. 2024 - 2025

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

1 Fonctions réelles d'une variable réelle

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un seul point).
Si les bornes de I sont deux réels a et b, on appelle *adhérence* de I, et on note $\overline{I}$, l'ensemble $\overline{I} = I \cup \{a, b\}$.
Plus généralement, l'adhérence d'une partie A de $\mathbb{R}$ est l'ensemble obtenu en rajoutant à A les points de sa *frontière*.
Par extension, on note $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$.

1 Limites des fonctions

1.1 Notion de voisinage

Définition 1. **Voisinage d'un point**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors,

- ✗ tout intervalle de la forme $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$ est appelé "un voisinage de x_0";
- ✗ tout intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$ est appelé "un voisinage de x_0^+";
- ✗ tout intervalle de la forme $]x_0 - \delta, x_0[$ avec $\delta > 0$ est appelé "un voisinage de x_0^-";
- ✗ tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A > 0$ est appelé "un voisinage de $+\infty$";
- ✗ tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A < 0$ est appelé "un voisinage de $-\infty$".

L'ensemble des voisinages de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ est noté $V(\alpha)$.

☞ Tout voisinage de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ est un intervalle ouvert et non trivial, car on a pris $\delta > 0$.

Définition 2.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ et $P(x)$ une propriété dépendant de x. On dit que "$P(x)$ est vraie au voisinage de α" s'il existe un voisinage V de α tel que $P(x)$ soit vraie pour tout $x \in V$.

Exemple 1.

- ✗ Dire que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est positive au voisinage de $+\infty$ c'est dire qu'il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel f est positive, c'est à dire :
$$\exists A > 0, \forall x \in]A, +\infty[, \ f(x) \geqslant 0.$$
- ✗ Soit x_0 un réel. Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de x_0 c'est dire que :
$$\exists \delta > 0,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I.$$

On peut alors donner la définition **générale** de limite.
Celle-ci est hors-programme, mais permet aussi de bien comprendre. On saura en revanche utiliser celle qui suit juste après, qui est une reformulation avec certains voisinages.

Définition 3. **Hors Programme**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{I}$ et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit alors que "f tend vers β en α", ce qui sera noté $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, si l'on a

$$\forall V \in V(\beta),\ \exists W \in V(\alpha),\ \forall x \in I,\quad (x \in W \Longrightarrow f(x) \in V)\,.$$

Lorsque f possède une limite finie au voisinage de α, on dit que "f converge en α". Dans le cas contraire, on dit que "f diverge en α".

Définition 4. **Limite en x_0**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si x_0 et ℓ sont des réels:

- ✗ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ équivaut à $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I,\quad (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$
- ✗ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ équivaut à $\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I,\quad (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A)\,.$
- ✗ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ équivaut à $\forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\quad (x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$

Cette définition s'applique également si α, β sont de la forme x_0^+ ou x_0^- avec $x_0 \in \mathbb{R}$, ce qui donne par exemple :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I, (0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. On suppose que f admet ℓ pour limite en $+\infty$. Montrer que f admet $-\ell$ pour limite en $-\infty$.

1.2 Quelques résultats sur les limites

Théorème 1. **Caractérisation séquentielle de la limite**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $\alpha \in \overline{I}$ et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I tendant vers α, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \beta$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique (de période T) admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Théorème 2. **Prolongement des inégalités**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{I}$, et a, b des réels. On suppose que f possède une limite finie en α et que

$$\forall x \in I,\ a < f(x) < b.$$

On a alors

$$a \leqslant \lim_{x\to\alpha} f(x) \leqslant b.$$

☞ Le passage à la limite prolonge donc tout type d'inégalités en **inégalités larges**.

Lemme 1. **Lemme des gendarmes**

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{I}$, et ℓ un réel. On suppose encore:

- $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;
- $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \ell$.

Alors (f possède une limite lorsque x tend vers α et) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

Exercice 3.

Montrer, à l'aide de considérations géométriques, que, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Les théorèmes suivants sont l'expression fonctionnelle du théorème de la limite monotone vu dans le cadre des suites.

Théorème 3. **Théorème de la limite monotone**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, de sorte que $a < b$, et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction.
Si la fonction f est croissante sur $]a, b[$, alors elle admet une limite, finie ou infinie, en a et en b. Plus précisément, on a:

(i)
- si f n'est pas majorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.
- si f est majorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite finie en b^-.

(ii)
- si f n'est pas minorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.
- si f est minorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite finie en a^+.

Théorème 4. **Théorème de la limite monotone, bis**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, de sorte que $a < b$, et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction.
Si la fonction f est décroissante sur $]a, b[$, alors elle admet une limite, finie ou infinie, en a et en b. Plus précisément, on a:

(i)
- si f n'est pas majorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$;
- si f est majorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite finie en a^+.

(ii)
- si f n'est pas minorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$;
- si f est minorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite finie en b^-.

2 Comparaison locale (au voisinage d'un point)

Définition 5. **Négligeabilité**

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur V.
On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de α si et seulement si $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On note $f(x) \underset{x \to \alpha}{=} o(g(x))$ ou $f(x) = o(g(x)), x \to \alpha$.

Exemple 2.

✗ On peut alors écrire les relations suivantes

$$(i)\ x^2 \underset{x \to 0}{=} o(x), \qquad (ii)\ e^x \underset{x \to +\infty}{=} o\left(e^{2x}\right), \qquad (iii)\ \frac{1}{x^2} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

✗ Dire que $f(x) \underset{x \to \alpha}{=} o(1)$, c'est dire que f tend vers 0 en α. On a la même conclusion sous l'hypothèse $f(x) \underset{x \to \alpha}{=} o(c)$ où $c \in \mathbb{R}^*$.

Remarque 1.

☠ Il faut bien comprendre et garder à l'esprit que la négligeabilité en un point n'entraîne nullement la négligeablité ailleurs. Il suffit de regarder l'exemple (i) ci-dessus

$$x^2 \underset{x \to 0}{=} o(x), \quad \text{mais} \quad x^2 \underset{x \to 2}{\neq} o(x) \quad \text{et} \quad x^2 \underset{x \to +\infty}{\neq} o(x).$$

☠ On comprend l'importance de ne pas simplement écrire $f(x) = o(g(x))$ sans préciser le voisinage concerné!

Théorème 5. **Croissances comparées**

Soient r, s des réels.

(i) On a

$$r < s \Rightarrow x^r \underset{x \to +\infty}{=} o(x^s) \qquad \text{et} \qquad r < s \Rightarrow x^s \underset{x \to 0}{=} o(x^r).$$

En d'autres termes, "les grandes puissances l'emportent au voisinage de $+\infty$, et les petites au voisinage de 0".

(ii) Si $r > 0$, on a

$$x^r \underset{x \to +\infty}{=} o(e^x), \qquad \ln x \underset{x \to +\infty}{=} o(x^r) \qquad \text{et} \qquad \ln x \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{rx}).$$

En d'autres termes, "au voisinage de $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme".

Exercice 4.

Calculer les limites de $x \mapsto x^x$ aux bornes de son domaine de définition.

Définition 6. **Domination**

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur V.

On dit que f **est dominée par** g au voisinage de α si et seulement si $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée sur V.

On note $f(x) \underset{x \to \alpha}{=} O(g(x))$ ou $f(x) = O(g(x)),\ x \to \alpha$.

Proposition 1.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On a alors:

$$f(x) \underset{x \to \alpha}{=} o(g(x)) \implies f(x) \underset{x \to \alpha}{=} O(g(x)).$$

Définition 7. **Quantités équivalentes**

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur V.

On dit que $f(x)$ est **équivalent** à $g(x)$ au voisinage de α si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \sim g(x),\ x \to \alpha$.

Exercice 5.

Interpréter le résultat de l'**Exercice 3** comme un équivalent au voisinage de 0. Qu'en est-il au voisinage de $+\infty$?

☞ On remarquera qu'il découle immédiatement de la définition que, si $\ell \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} \ell.$$

Proposition 2.

Toute fonction polynomiale est équivalente à son monôme de plus haut degré en $\pm\infty$.
Toute fonction polynomiale est équivalente à son monôme de plus bas degré en 0.

☞ Par exemple,

$$2x^7 - 18x^3 + 91 \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x^7, \quad \text{ou encore} \quad -12x^3 + 2x^2 + 5x \underset{x \to 0}{\sim} 5x.$$

Proposition 3.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) On peut traduire un équivalent à l'aide d'une égalité au voisinage de α :

$$f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to\alpha}{=} g(x) + o(g(x)).$$

☞ La réciproque indique notamment qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme. Ainsi :

$$f(x) + o(f(x)) \underset{x\to\alpha}{\sim} f(x).$$

(2) Deux quantités équivalentes au voisinage d'un point ont la même limite en ce point. La réciproque est fausse bien entendu.

$$f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x) \Longrightarrow \lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x).$$

Exercice 6.

Utiliser des équivalents pour déterminer les limites suivantes.

$$(i)\ \lim_{x\to+\infty} e^x - x^3 - \ln(x); \qquad (ii)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\ln(x)}{\sqrt{e^x+x^3}}; \qquad (iii)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)}.$$

Remarque 2.

Il existe un certain nombre d'erreurs classiques sur les équivalents, auxquelles il faut prendre garde.

(i) **On ne peut pas sommer les équivalents**:

$$f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x) \text{ n'implique pas } (f+h)(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} (g+h)(x).$$

On a par exemple $-x^3 + x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x^3 + x$, et pourtant on n'a pas $x^2 \underset{+\infty}{\sim} x$!

(ii) **On ne peut pas élever une équivalence à une puissance dépendant de** x:

$$f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x) \text{ n'implique pas } f(x)^{h(x)} \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x)^{h(x)}.$$

On a par exemple $2^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} 1$, et pourtant $\left(2^{1/x}\right)^x \underset{+\infty}{\sim} 1^x$ est inexact.

(iii) **On ne peut pas composer à gauche des équivalents**:

$$f \sim g \text{ n'implique pas } h\circ f \sim h \circ g.$$

On a par exemple $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$, mais par contre on n'a pas $e^{x^2+x} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^2}$.

(iv) On peut toutefois effectuer des produits d'équivalents, ou élever une équivalence à une puissance constante.

Exercice 7.

Montrer que : $\exp\left(\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x)$

3 Continuité

Définition 8. **Continuité en x_0**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que :

- f est **continue** en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\quad (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,.$$

- f est **continue à droite** (resp. **à gauche**) de x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

Exemple 3.

La fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

Théorème 6. **Caractérisation séquentielle de la continuité**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue en x_0;
(ii) Pour toute suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ (dont les termes appartiennent à un *voisinage* de x_0 à partir d'un certain rang) qui converge vers x_0, on a que la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(x_0)$.

Définition 9. **Continuité sur un intervalle**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f **est continue sur** I si elle est continue en chacun des réels $x_0 \in I$.

Remarque 3.

Il a été dit en Terminale que les fonctions continues sont celles que l'on peut "tracer sans lever le stylo". Cette notion est informelle et ne peut donc pas être utilisée dans une démonstration, mais il peut être utile de la garder à l'esprit puisqu'elle permet d'appréhender la majorité des exemples rencontrés au concours.

Exercice 8.

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

☞ Il est possible de rencontrer des fonctions qui ne sont continues nulle part (voir par exemple l'**Exercice 23**).

Théorème 7. **Théorème des valeurs intermédiaires, $1^{\text{ière}}$ version**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a \leqslant b$ deux réels de I. Si $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple 4.

Considérons une fonction polynomiale de la forme $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
Puisque $f(x) \to +\infty,\ x \to +\infty$, on en déduit que f est à valeurs positives pour x supérieur à un réel A donné.
De même, comme $f(x) \to -\infty,\ x \to -\infty$, il vient que f est à valeurs négatives pour x inférieur à un réel A' donné.
On déduit du théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à f sur $[A', A]$) que f s'annule en au moins un réel $x \in [A', A]$.

☞ On a ainsi démontré que toute fonction polynomiale de degré 3 possède une racine réelle (ce résultat se généralise à tous les polynômes de degré impair).

Exercice 9.

Montrer que toute fonction continue $f :\ [a, b] \longrightarrow [a, b]$ admet au moins un point fixe.

Théorème 8. **Théorème des valeurs intermédiaires, 2^{nde} version**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a \leqslant b$ deux réels de I. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

☞ Attention, le théorème des valeurs intermédiaires (TVI pour les intimes) ne permet pas de compter le nombre d'antécédents d'une valeurs de l'intervalle image. Pour cela, on utilise plutôt le corollaire suivant.

Théorème 9. **Théorème de la bijection monotone**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue sur $f(I)$, et elle est de même monotonie que f.

Exercice 10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$(E_n) \qquad e^x - x = n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet exactement deux solutions réelles α_n et β_n telles que $\alpha_n < 0 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et déterminer sa limite.

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé et borné de la forme $[a,b]$. Le résultat suivant indique que toute fonction continue sur un segment y possède une valeur maximale et une valeur minimale, ou autrement dit que **toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes**.

Théorème 10. **Théorème des bornes atteintes**

Soient $a \leqslant b$ des réels, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in [a,b]^2$ tels que

$$\forall x \in [a,b],\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

Plus précisément,

$$f(\alpha) = \inf_{t\in[a,b]} f(t) = \min_{t\in[a,b]} f(t), \qquad f(\beta) = \sup_{t\in[a,b]} f(t) = \max_{t\in[a,b]} f(t).$$

☞ Ce résultat n'est plus vrai si l'on considère une fonction continue sur un intervalle quelconque. Prenons par exemple la fonction définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0,1]$. On a $\inf_{x\in]0,1]} f(x) = 0$, et pourtant f ne prend jamais la valeur 0.

Exercice 11.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$.

4 Dérivabilité

Définition 10. **Taux d'accroissement**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0, et l'on note Δ_{f,x_0}, la fonction définie pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ par:

$$\Delta_{f,x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Définition 11. **Dérivabilité en x_0**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

✗ On dit que f est **dérivable en** x_0 si son taux d'accroissement admet une limite finie en x_0; on note alors $f'(x_0)$ cette limite.

✗ On dit que f est **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) de x_0 si son taux d'accroissement admet une limite finie en x_0^+ (resp. x_0^-).

Théorème 11.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On a alors

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } x_0 \\ \textbf{et } \lim_{x\to x_0^-} \Delta_{f,x_0}(x) = \lim_{x\to x_0^+} \Delta_{f,x_0}(x) \end{cases}$$

Proposition 4.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage V de x_0. Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Longrightarrow f \text{ continue en } x_0.$$

Preuve. On peut écrire (pour $x \neq x_0$ dans un voisinage de x_0)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta_{f,x_0}(x).$$

Il est alors immédiat que si f dérivable en x_0, $\Delta_{f,x_0}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$ et donc $f(x) \to f(x_0)$, ce qui signifie que f est continue en x_0. □

☠ La réciproque est bien évidemment fausse !

Exercice 12.

La fonction f de l'**Exercice 3** est-elle dérivable en 0 ?

Proposition 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. On appelle **tangente à la courbe représentative** de f au point d'abscisse a la droite passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(a)$. Cette tangente admet donc pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

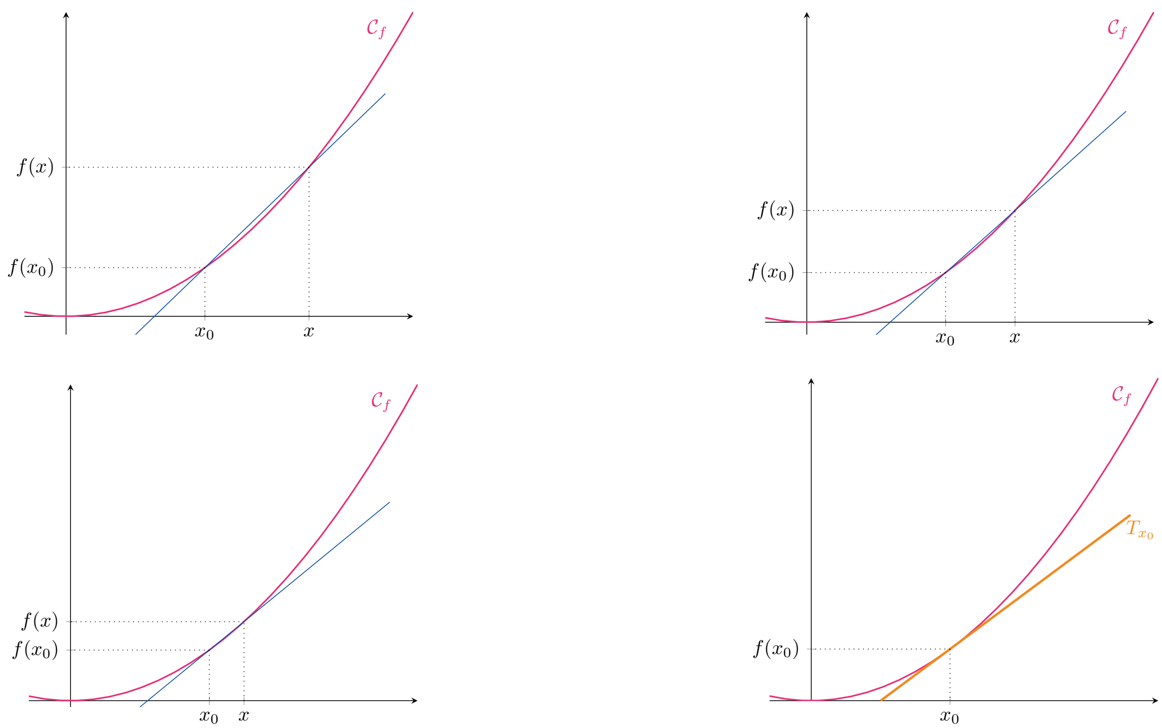


Illustration. La tangente en x_0 comme "limite" des cordes.

Proposition 6. **Dérivée d'une composée**

Soit J un intervalle véritable de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$.
On suppose f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

Proposition 7. **Dérivée de la bijection réciproque**

Soient J un intervalle véritable de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction bijective, $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$.
On suppose de plus que f est dérivable en x_0. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0, de sorte que

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Définition 12. **Extremum local**

Soient $f : \ I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I. On dit que f présente un **extremum local** en x_0 s'il existe un voisinage $V \in V((x_0)$ tel que

$$\forall x \in V(x_0), \quad f(x) - f(x_0) \text{ est de signe constant .}$$

Lorsque ce signe est positif (resp. négatif), on parle de **minimum local** (resp. **maximum local**).

Proposition 8. **Extremum local et dérivée : condition nécessaire**

Soient $f : \ I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I où f est dérivable.
Si f admet un extremum (local) en x_0, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Preuve. Considérons un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x) - f(x_0)$ est constant. Alors, pour $x \in V$, Δ_{f,x_0} est de signe opposé lorsque $x < x_0$ et $x > x_0$. La limite, qui est égale à $f'(x_0)$ par hypothèse, est alors à la fois positive (ou nulle) et négative (ou nulle). Elle est donc nulle. $\square$

4.1 Propriétés globales des fonctions dérivables

Dans cette section, les lettres a et b désigneront deux réels tels que $a < b$.

Le TVI combiné avec la Proposition 8 permet d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 12. **Théorème de Rolle**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que:

i. f est continue sur $[a, b]$;
ii. f est dérivable sur $]a, b[$;
iii. $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 13.

Soit f une fonction dérivable admettant $n \geqslant 2$ racines distinctes. Alors f' admet au moins $n - 1$ racines distinctes.

Théorème 13. **Égalité des accroissements finis**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

i. f est continue sur $[a, b]$;
ii. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$.

☞ Il n'existe pas de méthode simple et générale permettant de calculer la valeur de c.
☞ Il n'y a pas unicité du point c.

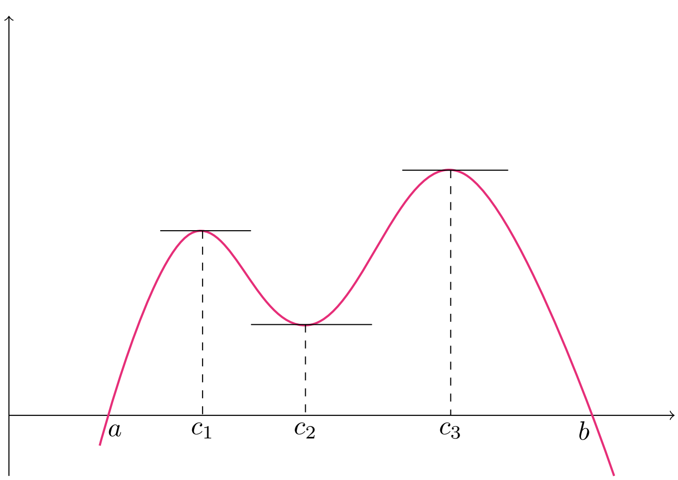


Illustration du Théorème de Rolle.

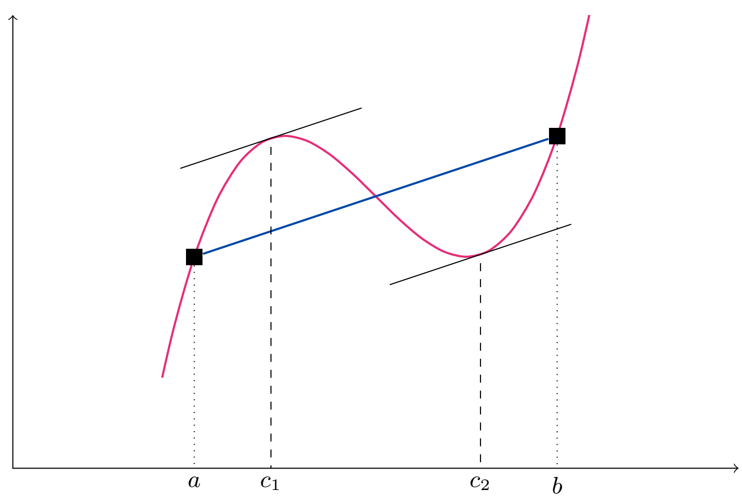


Illustration de l'égalité des accroissements finis.

Théorème 14. **Inégalité des accroissements finis**

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction et m, M deux réels. On suppose que :

i. f est continue sur $[a, b]$;
ii. f est dérivable sur $]a, b[$;
iii. $\forall x \in]a, b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Alors on a:

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

Le résutat suivant indique que, sous certaines conditions, la connaissance de $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ permet de déterminer la valeur de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Théorème 15. **Théorème de la limite de la dérivée**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in I$ et $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

i. f est continue sur I;
ii. f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$;
iii. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x) = \ell_2$.

On a alors :

1. Si $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0 de sorte que $f'(x_0) = \ell_2$;
2. Si $\ell_2 = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0.

Définition 13. **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

Théorème 16. **Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$**

Soient $x_0 \in I$, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction et ℓ_1, ℓ_2 des réels. On suppose que :

i. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{x_0\}$;
ii. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell_1$;
iii. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x) = \ell_2$.

Alors, f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I, et plus précisément:

1. f se prolonge par continuité en x_0 en une fonction $\tilde{f}$;
2. $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
3. $\tilde{f}(x_0) = \ell_1$ et $\tilde{f}'(x_0) = \ell_2$.

Exercice 14.

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 0 \\ x^3, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est prolongeable sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et que la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 0 \\ x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ne l'est pas.

4.2 Dérivées successives

Définition 14. **Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- ✗ On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue sur I.
- ✗] On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.
- ✗ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est dérivable sur I et f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I.
- ✗ On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note :

- ✗ $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs réelles.
- ✗ $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et à valeurs réelles.
- ✗ $f^{(k)}$ la **dérivée** k-ème de f. Par convention, on a donc $f^{(0)} = f$.

☞ Il existe des fonctions dérivables en tout point et qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 5.

La fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$ en 0.

Théorème 17. **Formule de Leibniz**

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$, de sorte que

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

Remarque 4.

La formule ci-dessus peut sembler, dans son écriture, proche de celle du binôme de Newton. Mais d'une part elle ne fait pas apparaître des puissances mais des dérivées, et d'autre part son sens est très différent, puisqu'elle permet de calculer la dérivée $n-$ième d'un produit (et non de développer la puissance $n-$ième d'une somme).

Exercice 15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée $n-$ième de $f : x \mapsto (x^2+1)e^{2x}$.

5 Formules de Taylor

Les lettres a et b désigneront dans cette section deux réels tels que $a < b$. Nous allons énoncer *les formules de Taylor*, qui généralisent le théorème des accroissement finis aux fonctions plusieurs fois dérivables.
Elles permettent d'écrire toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ sous la forme d'une somme d'un polynôme de degré n et d'un reste :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n.$$

Dans les théorèmes qui suivent, on établit certaines propriétés de ce reste.

Théorème 18. **Formule de Taylor avec reste intégral**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

Et si on considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_{a}^{b} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \mathrm{d}t.$$

☞ Cette formule n'est pas exigible au concours. Elle se démontre par récurrence, par intégrations par parties successives. Par contre il faut connaitre les deux suivantes.

Le résultat suivant majore l'erreur commise lors de l'approximation de $f(b)$ par le polynôme de Taylor de f en a.
La preuve découle immédiatement de l'a formule de Taylor avec reste intégral et de l'inégalité triangulaire.

Théorème 19. **Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Exercice 16.

Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour l'exponentielle sur l'intervalle $[0, x]$.

☞ La formule suivante permet d'obtenir les développements limités.

Théorème 20. **Formule de Taylor-Young**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage V de x_0.
Alors f admet un développement limité à l'ordre n donné par:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0.$$

En posant $x = x_0 + h$, il vient:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o\left(h^n\right), \quad h \to 0.$$

Remarque 5.

La formule de Taylor-Young a l'avantage d'être plus simple que les précédentes, mais l'inconvénient de ne proposer qu'une approximation locale, c'est-à-dire qu'**elle n'est pertinente que lorsque** x **tend vers** x_0.

Exercice 17.

Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$.

6 Fonctions usuelles

6.1 Les fonctions hyperboliques

Définition 15. **Fonctions hyperboliques**

On appelle **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique**, et l'on note (respectivement) ch et sh les fonctions définies pour tout réel x par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

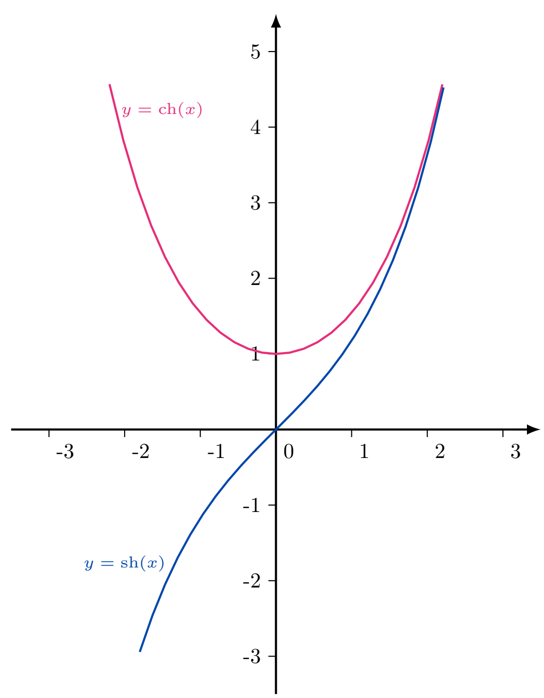
Proposition 9.

On a les résultats suivants.

i. La fonction ch est paire, et sh est impaire;
ii. Pour tout réel x on a $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$;
iii. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de sorte que $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

On peut alors tracer les tableaux de variation de ch et sh, puis en déduire leur courbe représentative.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$
sh	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$



6.2 Les fonctions puissances

Définition 16.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$, on appelle x puissance a et l'on note x^a la quantité définie par
$$x^a = e^{a \ln x}.$$

✏ Pour effectuer un calcul complexe avec une quantité de la forme u^v, on revient à la définition en écrivant $u^v = e^{v \ln u}$.

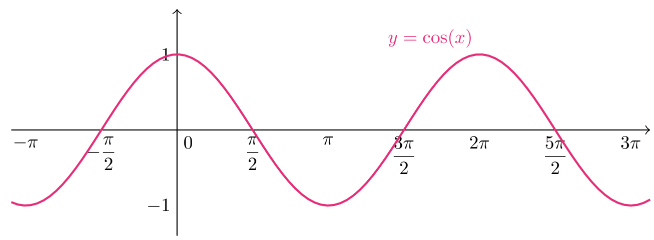
Exercice 18.
Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f : \ x \mapsto x^x$.

6.3 Les fonctions trigonométriques et leurs réciproques

Cosinus et arccosinus.

Proposition 10.
La fonction cosinus est dérivable, et sa dérivée est donnée par $(\cos)' = -\sin$.

On obtient alors le graphe ci-contre en considérant par ailleurs que la fonction cosinus est paire et 2π-périodique.



☞ La fonction cos ne réalise pas une bijection: pour tout réel $y \in [-1, 1]$ l'équation $y = \cos x$ admet une infinité de solutions (le cosinus est périodique). Néanmoins, le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, ce qui permettra de l'inverser sous réserve de le restreindre à $[0, \pi]$.

Proposition 11.
La fonction $\cos_{|[0,\pi]}$ réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

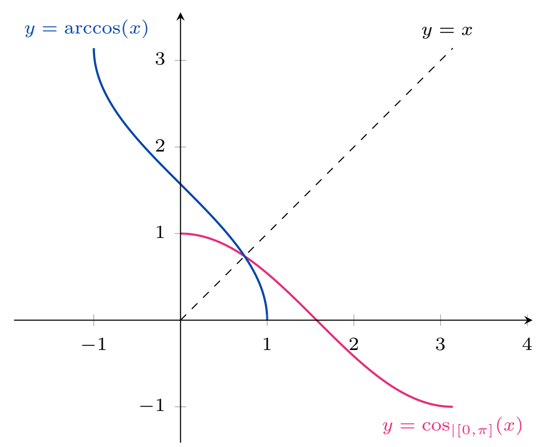
Définition 17. **Arccosinus**
On appelle **arccosinus**, et on note arccos, la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$.

☞ On a donc
$$\forall y \in [-1, 1], \ \cos(\arccos \ y) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, \pi], \ \arccos(\cos x) = x.$$
En d'autres termes, si $y \in [-1, 1]$, $\arccos(y)$ est l'unique $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos x = y$.

Proposition 12.
On a les résultats suivants.

i. La fonction arccos réalise une bijection continue et strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.

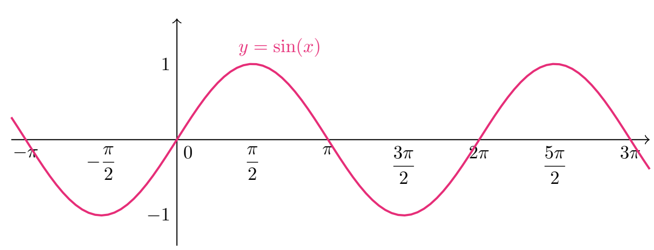
ii. La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, de sorte que:
$$\forall x \in]-1, 1[, \ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



Sinus et arcsinus.

Proposition 13.
La fonction sinus est dérivable, et sa dérivée est donnée par $(\sin)' = \cos$.

On obtient alors le graphe ci-contre en considérant par ailleurs que la fonction sinus est impaire et 2π-périodique.



De même on restreint le sinus à un intervalle où il est strictement monotone pour pouvoir l'inverser.

Proposition 14.
La fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

Définition 18. **Arcsinus**
On appelle **arcsinus**, et on note arcsin, l'inverse de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

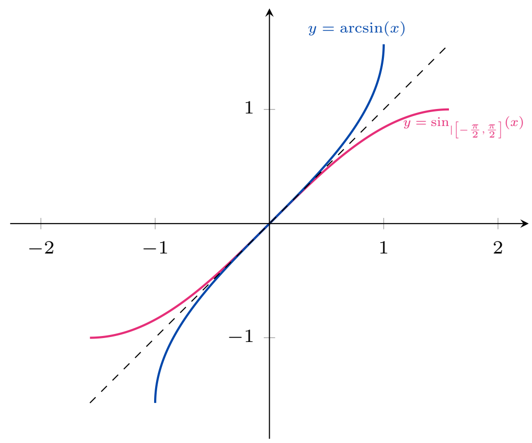
☞ On a donc
$$\forall y\in[-1,1],\ \sin(\arcsin\ y)=y \quad \text{et} \quad \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin x)=x.$$
En d'autres termes, si $y\in[-1,1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x=y$.

Exercice 19.
Calculer $\arcsin(1)$ puis $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 15.
On a les résultats suivants.

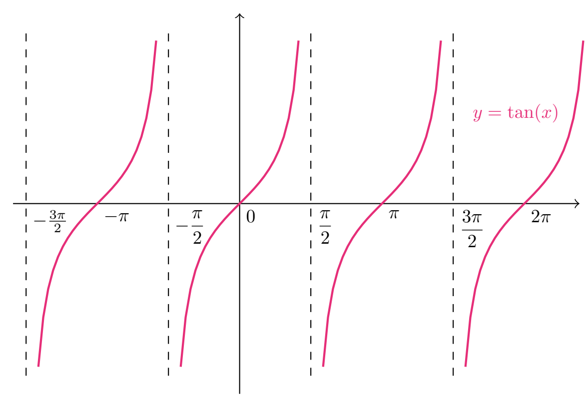
i. La fonction arcsin réalise une bijection continue et strictement croissante de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

ii. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, de sorte que:
$$\forall x\in]-1,1[,\ \arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Tangente et arctangente.

Proposition 16.
La fonction tangente est définie sur
$$\mathcal{D}=\left\{x\in\mathbb{R};\forall k\in\mathbb{Z},x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}.$$
Sur $\mathcal{D}$, la fonction tangente est dérivable, impaire et π-périodique, et sa dérivée est donnée par
$$(\tan)'=\frac{1}{\cos^2}=1+\tan^2.$$



Proposition 17.
La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 19. **Arctangente**
On appelle **arctangente**, et on note arctan, l'inverse de la fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.

☞ On a donc
$$\forall y\in\mathbb{R},\ \tan(\arctan\ y)=y \quad \text{et} \quad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan x)=x.$$
En d'autres termes, si $y\in\mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x)=y$.

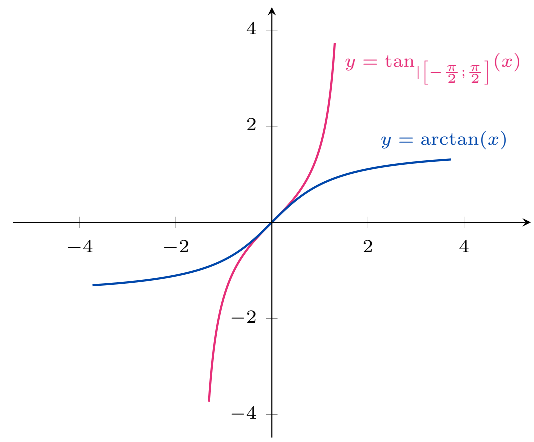
Proposition 18.
On a les résultats suivants.

i. La fonction arctan réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

ii. La fonction arctan est dérivable, de sorte que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.



Exercice 20.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

7 Développements limités (usuels)

On rappelle quelques développements usuels, à connaître sur le bout des doigts.

Théorème 21. **DL usuels en 0**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a les développements limités suivants.

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{x\to0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)\\
\cos(x) &\underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})\\
\sin(x) &\underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)\\
\tan(x) &\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\
\arctan(x) &\underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})\\
\ln(1+x) &\underset{x\to0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)\\
\mathrm{ch}(x) &\underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})\\
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

Remarque 6.

- ☞ Dans l'énoncé ci-dessus, tous les développements donnés sont à l'ordre n, sauf celui de cos qui est à l'ordre $2n$, ainsi que ceux de sin et arctan qui sont à l'ordre $2n+1$.
- ☞ On peut démontrer aisément que si une fonction paire (resp. impaire) admet un développement limité, alors celui-ci ne fait apparaitre que des termes d'ordre pair (resp. impair).

- ✏ On peut additionner, soustraire, multiplier, composer et intégrer (mais pas toujours dériver...) des développements limités.
- ✏ Pour calculer un développement limité d'une fonction $x \mapsto f(x)$ en $x_0 \neq 0$ on effectue un changement de variable, en posant $x = x_0 + h$, avec h qui tend vers 0. On calcule alors un DL(0) de $h \mapsto f(x_0 + h)$, puis on revient au développement recherché en posant $h = x - x_0$.
- ✏ Pour calculer un développement *asymptotique* d'une fonction $x \mapsto f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ on effectue un changement de variable, en posant $t = 1/x$, avec t qui tend vers 0. On calcule alors un DL(0) de $t \mapsto f(1/t)$, puis on revient au développement recherché en revenant à x.
- ✏ Deux développements limités sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes cœfficients.

Exercice 21.

Donner un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(\cos(h))$.

Exercice 22.

Donner un développement de $\sqrt{1+x^2}$ au voisinage de $+\infty$, à la précision $\dfrac{1}{x}$. Interprétation graphique?

8 Exercices - Travaux dirigés

Exercice 23. **Une fonction continue nulle part**

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. En considérant la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_n = \sqrt{2}/n$ et à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Adapter le raisonnement pour montrer que f n'est continue en aucun point rationnel.
3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, définie par $x_n = \lfloor nx \rfloor / n$, a pour limite x et que tous les termes sont rationnels.
   b. En déduire que f n'est pas continue en x.

Exercice 24.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(0), & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

2. Montrer, pour tout réel x non nul, l'égalité

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x} - \frac{F(-x)-F(0)}{x}\right).$$

3. En déduire que g est continue en 0.

4. Montrer enfin que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f:\ x \mapsto \dfrac{x^2-4x+6}{x-1}$.

Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes, et que l'intersection de celles-ci est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 26.

Déterminer toutes les fonctions f telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)-f(x-y)=4xy$.

Exercice 27. **Une suite implicite**

On considère, pour $n\geq 3$, l'équation

$$(E_n) \qquad x^n+x^2+2x-1=0.$$

1. On introduit la fonction $f_n:\ x\mapsto x^2+x^2+2x-1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?
2. Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n\geq 3$,
$$0<x_n<\frac{1}{2}.$$
3. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.
4. En conclure que $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.
5. En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.
6. Conclure quant à la valeur de ℓ.

Exercice 28.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)^2=1$. Montrer que f est constante.

Exercice 29.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Après avoir montré que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=f(x/2^n)$, montrer que f est constante.

Exercice 30.

Étudier et tracer les courbes de $x\mapsto \arccos(\cos x)$ et de $x\mapsto\arctan(\tan x)$.

Exercice 31.

Résoudre l'équation $\arccos(x)+\arcsin(x^2-x+1)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 32.

Soit $f:\ [0;1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(0)=f(1)$.

1. On veut montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, l'équation $f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=f(x)$ admet au moins une solution.

   Soit $n\geq 1$. On pose, pour $x\in\left[0;1-\dfrac{1}{n}\right]$, $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$.

   a. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.
   b. Conclure.

2. *Application.* Un cycliste parcourt 20 km en une heure.

   a. Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
   b. Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.

Exercice 33.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f, puis en déduire une expression simplifiée de f.
3. Retrouver le résultat précédent en effectuant un changement de variable.

Exercice 34.

1. Soient a, b positifs ou nuls. Vérifier $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.
2. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k(k+1)}\right)$.

Exercice 35.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$. On note Γ sa courbe représentative dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum.
2. Soient α, β tels que $f(\alpha) = \min\limits_{\mathbb{R}} f$ et $f(\beta) = \max\limits_{\mathbb{R}} f$. Calculer $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$.
3. Donner l'équation de la tangente T_t à Γ au point de coordonnées $(t, f(t))$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que T_t coupe Γ au point de coordonnées $(t+a, f(t+a))$. *On pourra utiliser la fonction définie par $g(x) = af'(x) - f(x+a) + f(x)$.*

Exercice 36.

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\mathrm{sh} x}$ si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exercice 37.

On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que sur cet intervalle on ait $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$.
2. Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$, $\left(x^2 - 1\right) f'(x) = x f(x)$. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) + (2n-1)\, x P_n(x) + n(n-2)(x^2-1) P_{n-1}(x) = 0.$$

Exercice 38.

Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ de $\ln\left(x^3 + x + 1\right)$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 39.

Soit $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \left]-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$, $x \longmapsto xe^x$.

1. Montrer que f est bijective, et que f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.
2. Déterminer un DL_3 en 0 de f^{-1} et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

Exercice 40.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la dérivée n-ième de

1. g où $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
2. f où $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Exercice 41.

Effectuer l'étude locale des fonctions suivantes au voisinage de 0:

$$a : x \mapsto \ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right) \qquad b : x \mapsto \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^x \qquad c : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

Exercice 42.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^x - x - 1| \leqslant \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.

Exercice 43. **Suite récurrente et IAF**

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n).$$

1. Étude des variations de la fonction f_a .

a. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.

b. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

c. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de f_a.

d. En déduire que

$$\forall t > 0, \qquad f_a(t) \geq a.$$

2. Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

a. Que dire de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

b. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que, pour tout réel $t > a$,

$$0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}.$$

c. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq a$.

d. Prouver alors que pour tout entier n non nul

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}\left(u_n - a\right),$$

puis que

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|\,.$$

e. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

f. En déduire l'écrire d'une fonction en `Python` qui prend en argument deux réels strictement positifs b et ε et renvoie une valeur approchée de $\sqrt{b}$ à ε près.

Exercice 44.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Prouver que G est une fonction impaire.
2. Déterminer le signe de G sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad G(x) \geq \dfrac{x^3}{3}$. En déduire les limites de $G(x)$ aux infinis.
4. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout réel x, une expression de sa dérivée $G'(x)$. Déterminer le développement limité de G à l'ordre 2 en 0.
5. Construire le tableau de variations complet de G sur $\mathbb{R}$.
6. Étudier la convexité de G.
7. Donner l'allure de la courbe représentative de G en précisant la tangente en 0.
8. On veut trouver des relations de négligeabilité sur $G(x)$ en $+\infty$. Soit $x > 1$ fixé.

a. Montrer que, pour tout $u \geq 0$, on a $e^u \geq 1 + u + \dfrac{u^2}{2}$.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties astucieuse, qu'il existe une constante $\kappa \geq 0$ telle que

$$G(x) = \kappa + \frac{e^{x^2}}{2x} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t.$$

c. *i.* Déduire de la question précédente que, pour tout $x \geq 1$, $G(x) \geq \dfrac{e^{x^2}}{2x}$.

ii. En déduire alors que, pour tout $\alpha > 1$, on a $\dfrac{e^{x^2}}{x^\alpha} = o(G(x)), \quad x \to +\infty$.

d. *i.* Montrer que la fonction $t \mapsto e^{t^2}/t$ est croissante sur $[1; +\infty[$.

ii. En déduire que

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{e^{x^2}}{2x}\ln(x).$$

iii. Montrer alors que, pour tout $\alpha < 1$, on a $G(x) = o\left(\dfrac{e^{x^2}}{x^\alpha}\right), \quad x \to +\infty$.

9. Montrer qu'en fait, on a $G(x) \sim \dfrac{e^{x^2}}{2x}$, $x \to +\infty$.

Exercice 45. **Extrait Mathématiques C, 2024**

Les questions suivantes sont extraites du sujet Mathématiques C posé en 2024 et représentent l'ensemble de la partie du sujet intitulée Préambule.

1. Rappeler, pour tout réel x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction cosinus, l'autre la fonction tangente) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan x.$$

2. **a**. Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0, \pi\left[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right.$, associe $g(x) = \frac{1}{\tan x}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0, \pi[$. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[$.

b. En déduire une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

3. On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

4. **a**. Expliciter les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2.

b. Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.

c. Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2.

d. Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1, l'expression de $f_1'(x)$.

e. Montrer que, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_2,

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et en déduire une expression simplifiée de $f_2'(x)$.

f. Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2. On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.
Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

g. Tracer, sur un même graphe (échelle : 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\pi, 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\pi, 2\pi]$.

5. On considère la fonction $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

a. Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3} \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3. Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?

b. Étudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.