Math PT. 2024 - 2025

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

2 Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités et exemples

Définition 1. **Notion de $\mathbb{K}-$espace vectoriel**

On appelle $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**, tout triplet $(E,+,\cdot)$ composé d'un ensemble E et de deux applications:

- l'une appelée *loi de composition interne* et notée $+$, définie par $\begin{cases} E\times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{cases}$
- l'autre appelée *loi de composition externe* et notée $\cdot$, définie par $\begin{cases} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda\cdot u \end{cases}$

qui vérifient les propriétés suivantes quels que soient les vecteurs $(u,v,w)\in E^3$ et les scalaires $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$:

i. La somme est associative: $(u+v)+w=u+(v+w)$.
ii. La somme est commutative: $u+v=v+u$.
iii. Il existe un vecteur de E, appelé *vecteur nul* et noté 0_E, qui vérifie : $u+0_E=u$.
iv. Tout vecteur $u\in E$ possède un *opposé* $u'\in E$ qui vérifie : $u+u'=0_E$.
L'opposé de u sera noté $-u$.

v. Le produit par un scalaire est distributif sur la somme de vecteurs: $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$.
vi. Le produit par un scalaire est distributif sur la somme de scalaires: $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$.
vii. Le scalaire $1\in\mathbb{K}$ est neutre: $1\cdot u=u$.
viii. Le produit par un scalaire est associatif sur les vecteurs: $(\lambda\mu)\cdot u=\lambda\cdot(\mu\cdot u)$.

☞ Un espace vectoriel est un ensemble muni d'une *structure algébrique* qui permet de faire du calcul et plus particulièrement des *combinaisons linéaires* d'éléments de l'espace.
On présente ci-après quelques espaces vectoriels de référence que nous rencontrerons très souvent.

Exemple 1.

- ✗ En géométrie, l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan (resp. l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ des vecteurs de l'espace) muni des opérations naturelles $+$ et $\cdot$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ✗ $(\mathbb{K},+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ✗ $(\{0_{\mathbb{K}}\},+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ✗ Étant donné deux entiers $n,p>0$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille $n\times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est la matrice nulle de taille $n\times p$.
- ✗ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ muni des opérations naturelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est $0_{\mathbb{K}^n}=(0,\dots,0)$.

- ✗ L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est le polynôme nul. Il en est de même pour l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n (pour $n \in \mathbb{N}$).
- ✗ L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites de scalaires peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est la suite dont tous les termes sont nuls.
- ✗ L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le vecteur nul associé est alors la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}\right.$ notée $\underline{0}$.
- ✗ Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle véritable I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le vecteur nul associé est alors la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}\right.$ notée $\underline{0}$.
- ✗ Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble quelconque. Alors E^X, l'ensemble des applications de X dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est l'application nulle de X dans E.

☞ Par abus de notation et pour alléger celles-ci, on note parfois le vecteur nul 0 sans préciser en indice l'espace vectoriel dont il est l'élément nul, ce qui peut, si on travaille sans trop de discernement prêter parfois à confusion avec le 0 de l'ensemble $\mathbb{K}$. On accordera une attention tout particulière aux objets qu'on manipule.

Dans la suite de ce chapitre, la lettre E désignera (sauf mention contraire) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2. **Combinaison linéaire**

Soient $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ lorsqu'on peut trouver des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

Exercice 1.

Dans chaque cas, le vecteur w est-il combinaison des vecteurs u et v?

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $w = (1, 2, 1)$, $u = (2, 1, 2)$ et $v = (1, 1, 2)$.

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$w = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, $w = X^2 + 1$, $u = X^3 - X$ et $v = 2X$.

Remarque 1.

☞ Plutôt que dire qu'un vecteur v est combinaison linéaire d'un seul vecteur u, on dira plutôt que u et v sont **colinéaires**.

☞ Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur (pour tout $u \in E$, $0_E = 0 \cdot u$).

☠ Attention, la notion de colinéarité n'a aucun sens dès lors qu'on parle d'un nombre de vecteurs strictement supérieur à 2.

Définition 3.

Soit $(u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de k vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille est noté

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_k) = \{v \in E \ : \ v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_k u_k, \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

Exercice 2.

Écrire les ensembles suivants sous forme d'un Vect(...).

1. $A = \{(x, y, -2x + y) \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$;

2. $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x + 2y & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

3. $C = \left\{P \in \mathbb{C}_3[X] : \ X^2 P' - 2P = 0\right\}$.

Proposition 1. **Simplification dans un $\mathrm{Vect}(...)$**

Soit $(u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de vecteurs de E.

i. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des réels **non nuls**, alors :
$$\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 u_2, \ldots, \lambda_k u_k);$$
ii. Si u_k est combinaison linéaire de $(u_1 \cdots, u_{k-1})$, alors
$$\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1}, u_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1});$$
☞ En particulier, si $u_k = 0_E$, alors :
$$\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1}, 0_E) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1}).$$
iii. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des réels **avec $\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0}$** alors :
$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_k) = \mathrm{Vect}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i, u_2, \ldots, u_k\right).$$

☞ Ainsi, dans un Vect(...), on peut supprimer les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres, on peut remplacer un vecteur par un multiple non nul de celui-ci, ou par une combinaison linéaire des autres vecteurs dès lors qu'on ne supprime pas la *contribution* du vecteur remplacé.

Exercice 3.

Montrer que, dans $\mathbb{K}_1[X]$,
$$\mathrm{Vect}(X-1, X+1, 2X+2) = \mathrm{Vect}(1, X).$$

2 Familles finies de vecteurs

Dans cette section toutes les familles de vecteurs considérées sont finies. Cette notion sera généralisée par la suite.

Définition 4.

Une sous-famille d'une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E indexée par I est une famille de la forme $\mathcal{F}' = (u_i)_{i\in J}$ où $J \subset I$. On dit aussi que $\mathcal{F}$ est une sur-famille de $\mathcal{F}'$.

2.1 Notion de famille génératrice (de E)

Définition 5. **Famille génératrice de E**

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de vecteurs de E. Si tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, on dit que la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une **famille génératrice de** E, ou que cette famille **génère** ou *engendre* E. En d'autres termes on a:
$$\begin{aligned}(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \text{ est génératrice de } E \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in E,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \\ &\Longleftrightarrow \quad E = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p).\end{aligned}$$

Exercice 4.

Montrer que deux vecteurs non nuls et orthogonaux du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ forment une famille génératrice de celui-ci.

Proposition 2.

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille génératrice de E. Alors,

i. La famille obtenue en changeant l'ordre des vecteurs de la famille initiale est génératrice de E;
ii. Pour tout $v \in E$, la famille $(u_1, u_2, ..., u_p, v)$ est encore génératrice de E, autrement dit, toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E.
iii. Si il existe $i \in [\![1; p]\!]$ tel que u_i est combinaison linéaire des u_j $(j \neq i)$, alors la famille $(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_p)$ reste génératrice de E.

☞ Le dernier point de la proposition ci-dessus permet de construire une sous-famille génératrice de cardinal *minimal* en "supprimant" les vecteurs de la famille qui sont combinaison linéaire des autres.

2.2 Notion de famille libre

Définition 6.
Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une **famille libre**, ou que ses vecteurs sont **linéairement indépendants** si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p,\ [\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_pu_p=0_E\quad\Longrightarrow\quad\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0_{\mathbb{K}}].$$

En d'autres termes, une famille libre est une famille dont toute combinaison linéaire nulle est triviale : la seule liaison possible entre les vecteurs est celle dont tous les coefficients sont nuls.
Inversement, lorsque des vecteurs ne forment pas une famille libre, on dit qu'ils sont **linéairement dépendants** ou qu'ils forment une **famille liée**.

La notion de famille liée généralise la notion de vecteurs colinéaires dès que le nombre de vecteurs est supérieur à deux.

Exercice 5.
Est-ce que les vecteurs $(1,0,1),(1,1,2)$ et $(2,1,2)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

Exemple 2.

- ✗ $\big(x\mapsto 1,\ \cos,\ \cos^2,\ x\mapsto\cos(2x)\big)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- ✗ Pour tout $\omega\in\mathbb{R}^*$, $(x\mapsto\cos(\omega x),\ x\mapsto\sin(\omega x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Proposition 3.
Une famille composée d'un unique vecteur est liée si et seulement si celui-ci est nul.

Proposition 4.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si la famille qu'ils forment est liée.

Exemple 3.
Les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ sont visiblement non colinéaires: ils forment une famille libre.

Proposition 5.
On a les résultats suivants :

i. Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un (au moins) de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
ii. Soient une famille libre $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de vecteurs de E, et $u_{p+1}\in E$. Alors la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p+1}$ est liée si et seulement si u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_p$.

Proposition 6.
On a les résultats suivants.
i. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
ii. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
iii. Si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre et si $v\notin\mathrm{Vect}((u_i)_{1\leqslant i\leqslant p})$, alors $(u_1,\dots,u_p,v)$ est encore libre.

2.3 Notion de base

Définition 7.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est une **base** de E si c'est à la fois une famille libre et génératrice.

Proposition 7. **Décomposition d'un vecteur dans une base**
Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E. Alors $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E **si et seulement si** :

$$\forall x\in E,\exists!\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ x=\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i.$$

Définition 8.
Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E et $x \in E$. On appelle **coordonnées** de x dans $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ l'**unique** n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

On note souvent le $n-$uplet de coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ sous forme d'une matrice colonne :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \iff \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Les bases sont donc les familles de vecteurs pour lesquelles il existe une notion de *coordonnées*. L'existence de celles-ci correspond au caractère générateur, et leur unicité à la liberté.

Exemple 4. **Base canonique de $\mathbb{K}^n$**

i. Soient $E = \mathbb{K}^2$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Tout vecteur $x = (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ s'écrit $x = \lambda(1,0) + \mu(0,1) = \lambda e_1 + \mu e_2$, ce qui prouve que la famille (e_1, e_2) génère $\mathbb{K}^2$. De plus on a pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E \iff (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \iff \lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0.$$

Cela montre que la famille (e_1, e_2) est une famille libre; c'est donc une base de $\mathbb{K}^2$, appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}^2$.

ii. Plus généralement, soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère le vecteur:

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ zéros}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i \text{ zéros}}).$$

Autrement dit, on pose $e_1 = (1, 0 \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$.
On montre en raisonnant comme ci-dessus que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{K}^n$; c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

☞ Ces bases sont dites **canoniques** dans le sens où elles apparaissent comme des bases *naturelles* de l'espace vectoriel considéré: les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique ne sont autres que les *composantes* (ou paramètres) de ce vecteur.
On connait les bases canoniques d'autres espaces vectoriels de référence.

Exemple 5. **Bases canoniques - suite**

i. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ constituée de np éléments où, pour tout couple $(i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j\text{-ème colonne} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{i,j}. \end{array}$$

ii. La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré inférieur ou égal à n est la famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$. Elle est constituée de $n+1$ vecteurs.

Exercice 6.
Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

forme une base $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3 Sous-espaces vectoriels

3.1 Définition, caractérisation et exemples

Définition 9. **Sous-espace vectoriel**

On appelle **sous-espace vectoriel** de E toute partie F de E telle que :

i. $0_E \in F$;
ii. $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$ (F est stable par la loi $+$);
iii. $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot x \in F$ (F est stable par la loi $\cdot$).

Proposition 8.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F, muni des lois $+$ et $\cdot$ restreintes à F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve. Comme F est stable pour $+$ et $\cdot$, celles-ci définissent des lois de composition interne et externe sur F. Il suffit alors de vérifier les huit points de la définition **??**, ce qui découle du fait que les lois considérées sont des restrictions de lois les vérifiant sur E. □

Proposition 9. **Caractérisation des sous-espaces vectoriels**

Soit F un ensemble. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :

i. $F \subset E$;
ii. $0_E \in F$;
iii. $\forall (x, y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F$ (F est stable par combinaison linéaire).

☞ Cette caractérisation est très pratique, c'est d'ailleurs celle-ci qu'on vérifiera dans la plupart des cas. Il ne sera jamais nécessaire de revenir à la définition d'espace vectoriel. Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montrera que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exemple 6.

- ✗ Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des scalaires. L'ensemble $\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n ; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

  Mais si β est un scalaire non nul, alors l'ensemble $\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n ; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \beta \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, car il ne contient pas le vecteur nul.

- ✗ $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

- ✗ Soit I un intervalle véritable de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{C}^0(I)$ des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.

- ✗ L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 10. **Sous-espace engendré**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. On a alors les résultats suivants.

i. $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le **sous-espace engendré** par $u_1, \ldots, u_p$.

ii. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

iii. Si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre, alors c'est une base de $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

Exemple 7.

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, $\underline{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application nulle, et $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}); y'' + \omega^2 y = \underline{0}\}$. Alors $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admettant pour base la famille $(x \mapsto \cos(\omega x),\ x \mapsto \sin(\omega x))$.

Exercice 7.

1. Montrer que $F = \{(2x, 3y, x+y, x) \in \mathbb{K}^4 :\ (x,y) \in \mathbb{K}^2\}$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base.
2. Montrer que $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z+t &=& 0 \\ x+z &=& 0 \end{array} \right\} \right.$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base.
3. Montrer que $H = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) :\ M^T = M\}$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base.

3.2 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 11. **Intersection de s-ev**

Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, l'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 2.

Il est erroné en revanche de penser que la réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Il suffit pour s'en convaincre de prendre par exemple deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$: $\mathrm{Vect}((1,0))$ et $\mathrm{Vect}((0,1))$: la somme d'un élément de la première droite et d'un élément de la seconde n'est pas élément de la réunion qui n'est donc pas stable par somme (ni par combinaison linéaire).

Remarque 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit alors directement des exemples 6 que tout sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ défini par un système d'équations cartésiennes homogènes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Définition 10.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de $F_1, \ldots, F_p$, et l'on note $F_1 + \cdots + F_p$, l'ensemble défini par:

$$F_1 + \cdots + F_p = \{u_1 + \cdots + u_p;\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ u_i \in F_i\}\,.$$

Proposition 12.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 11. **Somme directe**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que $F_1, \ldots, F_p$ sont en **somme directe** si tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_p$ s'écrit **de manière unique** comme somme de vecteurs appartenant aux F_i, c'est-à-dire:

$$F_1 + \cdots + F_p \text{ directe} \Leftrightarrow \forall u \in F_1 + \cdots + F_p, \exists!\,(u_1, \ldots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, u = u_1 + \cdots + u_p.$$

Dans ce cas, la somme de $F_1, \ldots, F_p$ sera notée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ au lieu de $F_1 + \cdots + F_p$.

Remarque 4.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On a alors $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}\,(e_i)\,.$

Les sommes directes de deux sous-espaces se caractérisent comme suit.

Proposition 13.

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}\,.$

Dans le cas général, on ne dispose que du résultat suivant.

Proposition 14.

Une somme de sous-espaces vectoriels est directe si et seulement si le vecteur nul se décompose de façon unique dans celle-ci.

On a enfin la notion de couples de sous-espaces supplémentaires.

Définition 12. **Sous-espaces supplémentaires**

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires** dans E si leur somme est directe et vaut E, c'est-à-dire si $E = F_1 \oplus F_2$. En d'autres termes:

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff \forall u \in E, \exists!\,(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2,\ u = u_1 + u_2.$$

C'est-à-dire que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2

Exemple 8.

- ✗ Soit P (resp. I) ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paires (resp. impaires). Alors $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$.
- ✗ Soit (u, v) une base de $\mathbb{K}^2$. On a alors $\operatorname{Vect}(u) \oplus \operatorname{Vect}(v) = \mathbb{K}^2$ donc $\operatorname{Vect}(v)$ est **un** supplémentaire de $\operatorname{Vect}(u)$. Mais comme $(u, u+v)$ est encore une base de $\mathbb{K}^2$, $\operatorname{Vect}(u+v)$ est un autre supplémentaire de $\operatorname{Vect}(u)$. En particulier, il n'y a pas unicité du supplémentaire.
  On utilisera donc un pronom indéfini pour parler d'un supplémentaire.

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition et théorème fondamental

Définition 13.

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de **dimension finie** lorsqu'il admet une base de cardinal fini.
Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

Théorème 1. **Dimension d'un ev**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E sont finies et ont même nombre de vecteurs. On appelle alors **dimension** de E, et l'on note $\dim(E)$ (ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$), le nombre de vecteurs d'une base de E.

☞ Dès qu'on est en mesure d'expliciter **une** base d'un espace vectoriel, on peut en déduire sa dimension.

Exemple 9. **Dimension des espaces de référence**

i. L'espace vectoriel trivial $\{0\}$ est de dimension 0.
ii. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
iii. $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.
iv. $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.
v. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. L'ensemble des solutions de $y'' + \omega^2 y = \underline{0}$ est de dimension 2.
vi. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Exemple 10.

i. Soit $u \in E$, tel que $u \neq 0_E$. Alors $\operatorname{Vect}(u) = \{\lambda u :\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est appelé la *droite vectorielle* de E engendrée par u ; c'est un espace vectoriel de dimension 1.

ii. Soient u et v deux vecteurs non colinéaires de E. Alors $\operatorname{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v :\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ est appelé le *plan vectoriel* de E engendré par u et v ; c'est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 8.

Montrer que $\operatorname{Vect}(\cos, \sin)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

4.2 Le théorème de la base incomplète et ses conséquences

Théorème 2. **Théorème de la base incomplète**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre finie de vecteurs de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de vecteurs de E. Alors E admet une base $\mathcal{B}$ obtenue à partir de $\mathcal{L}$ en ajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$.

Exercice 9.

Donner une base de $\mathbb{K}^4$ contenant les vecteurs $(1, 1, 0, -1)$ et $(1, -1, 0, 1)$.

Corollaire 1.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors :

i. Toute famille libre finie peut être complétée en une base finie de E.

ii. De toute famille génératrice finie, on peut extraire une sous-famille qui est une base finie de E.

☞ Le point *ii.* ci-dessus est appelé le *théorème de la base extraite* (ou base trop pleine).
Le résultat ci-dessous indique que les bases sont à la fois *les familles libres maximales* et *les familles génératrices minimales*.

Théorème 3. **Cardinal des familles et dimension**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E.

✗ *i.* Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathrm{card}(\mathcal{F}) \leqslant n$.
ii. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = n$.

✗ *i.* Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathrm{card}(\mathcal{F}) \geqslant n$.
ii. Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = n$.

Preuve. Résulte des théorèmes de la base incomplète et de la base extraite. □

Remarque 5.

Par contraposition, on déduit directement de i) et de j):

✗ Si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) > n$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
✗ Si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Corollaire 2.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Si deux des assertions suivantes sont vérifiées :

i. $\mathcal{F}$ est libre;
ii. $\mathcal{F}$ est génératrice;
iii. $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = n$;

alors la troisième assertion est également vérifiée, et $\mathcal{F}$ est une base.

☞ Pour montrer qu'une famille de vecteurs forme une base d'une espace vectoriel (dont on connait **déjà** la dimension), on montre souvent qu'elle est libre et on conclut par une phrase rigoureuse expliquant que cela suit car la famille "a le bon nombre de vecteurs".

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(1, X+1, (X+1)^2, ..., (X+1)^n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

4.3 Espaces vectoriels de dimension infinie

Les notions de famille libre ou génératrice se généralisent aux familles infinies de vecteurs.

Définition 14.

Soit I un ensemble infini, $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On note $\mathcal{P}_\mathrm{f}(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

i. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre si toute sous-famille finie de $\mathcal{F}$ est libre, c'est-à-dire si :

$$\forall J \in \mathcal{P}_\mathrm{f}(I),\ \forall(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J,\ \left[\sum_{j\in J} \lambda_j u_j = 0_E \iff \forall j \in J, \lambda_j = 0\right].$$

ii. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E si tout vecteur x de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'éléments de la famille $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E,\ \exists J \in \mathcal{P}_\mathrm{f}(I),\ \exists(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J, \quad x = \sum_{j\in J} \lambda_j u_j.$$

iii. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Proposition 15.
La famille $(X^k)_{k\geqslant 0}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée la *base canonique* de $\mathbb{K}[X]$.

Corollaire 3.
$\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Preuve. Si tel n'était pas le cas, alors toute famille libre de $\mathbb{K}[X]$ aurait moins de $n = \dim \mathbb{K}[X]$ éléments, ce qui contredirait le théorème précédent. □

Corollaire 4.
Soit I un intervalle véritable de $\mathbb{R}$. Alors $\mathbb{K}^I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

La définition suivante et le théorème associé sont souvent utiles pour montrer qu'une famille de polynômes est libre.

Définition 15. **Famille de polynômes échelonnée**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille de $\mathbb{K}[X]$. On dit que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est **échelonnée** si

$$-\infty < \deg P_0 < \deg P_1 < \cdots < \deg P_n.$$

Exemple 11.

✗ La base canonique de $\mathbb{K}[X]$ est échelonnée.
✗ La famille $((X+1)^k)_{k\geq 0}$, de l'**Exercice 10.**, est échelonnée.

Proposition 16. **Base et famille échelonnée en degré**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de $\mathbb{K}[X]$.

i. Si $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ échelonnée, alors $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.
ii. Si $\forall k \in [\![0, n]\!], \deg P_k = k$, alors $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
iii. Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg P_k = k$, alors $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 6.
☠ Il est erroné de croire que toute base de $\mathbb{K}[X]$ est une famille échelonnée: $X, X+1$ forment par exemple une base de $\mathbb{K}_1[X]$.

4.4 Croissance de la dimension

Proposition 17.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

i. F est de dimension finie.
ii. $\dim(F) \leq \dim(E)$.
iii. $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Ce résultat est analogue à un résultat sur le cardinal des ensembles finis.
☞ En pratique, pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux, il suffit de démontrer que l'un est inclus dans l'autre, puis de vérifier qu'ils ont même dimension.

4.5 Dimension et somme de sous-espaces

Proposition 18.
[Somme (directe) et dimension] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. On a alors

$$\dim (F \oplus G) \dim(F) + \dim(G).$$

Plus généralement, on a la formule suivante.

Proposition 19. **Formule de Grassmann**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a alors

$$\dim (F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim (F \cap G).$$

On observe que la formule ci-dessus est analogue à $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$.

Définition 16.

Soient $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ et $\mathcal{F}' = ({f_j}')_{j\in J}$ deux familles de vecteurs de E telles que les ensembles d'indices I et J sont disjoints (*i.e.* $I \cap J = \emptyset$). Pour $k \in I \cup J$, on pose :

$$g_k = \begin{cases} f_k, & \text{si } k \in I \\ {f_k}', & \text{si } k \in J. \end{cases}$$

On appelle alors **réunion disjointe** des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, et on note $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{F}'$, la famille $(g_k)_{k\in I\cup J}$. Intuitivement, la réunion disjointe de familles correspond à leur *concaténation* (ou juxtaposition).

On définit de même l'union disjointe d'un nombre fini quelconque de familles.

Proposition 20. **Base adaptée à la somme directe**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Alors toute union disjointe de bases de $F_1, \dots, F_p$ est une base de E. Cette base est dite **adaptée à la décomposition**

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i.$$

Corollaire 5.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Alors $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$.

Preuve. Résulte directement des théorèmes 20 et 18. □

☞ Dans le cas particulier d'une somme de deux sous-espaces, la réciproque du théorème 20 est au programme.

Théorème 4.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si l'union disjointe d'une base de F_1 et d'une base de F_2 est une base de E.

Théorème 5.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On a alors les résultats suivants.

i. F admet au moins un supplémentaire dans E.
ii. Tous les supplémentaires de F dans E ont la même dimension, égale à $\dim(E) - \dim(F)$.

Proposition 21.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si deux des assertions suivantes sont vérifiées

i. $F \cap G = \{0_E\}$
ii. $F + G = E$
iii. $\dim(F) + \dim(G) = \dim E$

alors la troisième assertion est également vérifiée, et alors les sous-espaces F, G sont supplémentaires dans E.

Exercice 11.

Vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4.6 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 17. **Rang d'une famille finie de vecteurs**

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$, et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\mathcal{F}$.
En d'autres termes, on pose

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}\mathcal{F}).$$

Exercice 12.
Soit (u, v) une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer le rang de $(u, v, u+v)$.

☞ Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace que cette famille engendre.
La caractérisation suivante est aussi fréquemment utile que la définition.

Proposition 22.
Le rang d'une famille finie de vecteurs est égal au cardinal de sa plus grande sous-famille libre.

Preuve. Posons $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Puisque la famille $u_1, \ldots, u_p$ génère F, sa plus grande sous-famille libre est une base de F (par le théorème de la base extraite), et le cardinal de cette dernière est donc égal à $\dim(F) = \mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_p)$. □

☞ Pour calculer le rang d'une famille finie $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$:

- ✗ on commence par regarder si elle est libre ou pas.
- ✗ Sinon, on retire un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.
  Si la famille obtenue n'est toujours pas libre, on en retire encore un vecteur etc...
  Ce faisant, on calcule une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ en utilisant la méthode de la base extraite.
  De manière *duale*, on peut également employer la méthode de la base incomplète et, partant de la famille $\emptyset$, rajouter des vecteurs de $\mathcal{F}$ tant que cela donne encore une famille libre.

4.7 Notion d'hyperplan

Définition 18. **Hyperplan**
On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de E admettant une droite pour supplémentaire.

Proposition 23. **Dimension d'un hyperplan**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est un hyperplan de E si, et seulement si $\dim(F) = n - 1$.

Exemple 12.

- ✗ Dans $\mathbb{R}^3$ les hyperplans sont des plans vectoriels, et dans $\mathbb{R}^2$ les hyperplans sont des droites vectorielles.
- ✗ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.
- ✗ $F = \{P \in \mathbb{K}[X];\ P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

5 Notion d'application linéaire

Dans la suite de ce chapitre, les lettres E, F désigneront (sauf mention contraire) des $\mathbb{K}$-espace vectoriels.

5.1 Définition, caractérisation et exemples

Définition 19. **Application linéaire, morphisme**
Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une **application linéaire** de E dans F, ou un **morphisme** d'espace vectoriels entre E et F, si elle vérifie les propriétés suivantes.

i. $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
ii. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Définition 20. **Types de morphismes**

- ✗ On appelle **isomorphisme** de E dans F toute application linéaire bijective $f : E \to F$.
- ✗ On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire $f : E \to E$.
- ✗ On appelle **automorphisme** de E toute application linéaire bijective $f : E \to E$.
- ✗ On appelle **forme linéaire** de E toute application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$.
  L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^*.

☞ On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des morphismes de E dans F, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition 24. **St abilité et endomorphisme induit**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Un sous-espace vectoriel A de E est dit **stable** par f si et seulement si $f(A) \subset A$.
Dans ce cas, l'endomorphisme $f_A : x \in A \longmapsto f(x) \in A$ est un endomorphisme de A, appelé **endomorphisme induit** par f dans A.

On a la caractérisation suivante des applications linéaires.

Proposition 25.

Soit $f : E \to F$ une application. Alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Les applications linéaires entre deux espaces vectoriels E et F sont donc les applications dont l'action est compatible avec la structure d'espace vectoriel: une combinaison linéaire est transformée en une combinaison linéaire. On peut ainsi étudier ces applications en utilisant les outils de l'algèbre linéaire.

Exemple 13. **Exemple d'applications linéaires**

- ✗ Quel que soit l'espace vectoriel E, l'application identité $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto x$ et l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)} : E \longrightarrow E,\ x \mapsto 0_E$ sont des endomorphismes de E.
- ✗ Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. L'application $H_k : E \longrightarrow E,\ x \mapsto \lambda \cdot x$ est un automorphisme de E, appelé l'**homothétie vectorielle** de rapport λ. On la note $\lambda \mathrm{id} E$.
- ✗ L'application de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$ définie par $\varphi : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, y)$ est linéaire.
- ✗ Soit I un intervalle véritable de $\mathbb{R}$. L'application $D : \mathcal{C}^{k+1}(I) \longrightarrow \mathcal{C}^k(I),\ f \longmapsto f'$ est linéaire.
- ✗ Soient $a < b$ des réels. L'application $\Psi : \mathcal{C}^0([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est linéaire.
- ✗ L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ définie par $\varphi : P \mapsto X^2 P - XP'$ est linéaire.
- ✗ Soit $n, p > 0$ entiers. L'application $\tau : M \mapsto M^T$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- ✗ L'application $\texttt{shift} :\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est linéaire.

Proposition 26.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a les résultats suivants.

i. $f(0_E) = 0_F$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ on a $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Remarque 7.

L'image du vecteur nul (de l'espace de départ) est toujours le vecteur nul (de l'espace d'arrivée), mais ces deux vecteurs n'ont pas nécessairement la même nature.

Proposition 27.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, ainsi que $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $(g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, G)^2$. On a:

$$(g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1 \qquad \text{et} \qquad g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2.$$

Ce théorème montre que la compostion est distributive par rapport à l'addition. Pour cette raison, la composée de deux morphismes $g \circ f$ est parfois notée gf, à la manière d'un produit; néanmoins, la composition n'est pas commutative, puisque $g \circ f$ et $f \circ g$ sont en général distincts.
Par ailleurs, la notation f^n désigne f composée n fois avec elle-même : $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

5.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 21. **Image et noyau**

Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

i. On appelle **noyau** de φ l'ensemble défini par $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in E : \ \varphi(x) = 0_F\} = \varphi^{-1}(\{0_F\})$.

ii. On appelle **image** de φ l'ensemble défini par $\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \in F : \exists x \in E, y = \varphi(x)\} = \{\varphi(x) : x \in E\} = \varphi(E)$.

Proposition 28.

Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Alors :

i. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E ;
ii. $\mathrm{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F.

☞ Ce résultat est très utile afin de reconnaitre directement des sous-espaces vectoriels. Dès qu'on peut écrire un ensemble comme image ou noyau d'une application linéaire, c'est automatiquement un (sous-) espace vectoriel!

Exercice 13.

Soient a, b, c des réels. Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 29. **Injectivité et Surjectivité**

Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On a les résultats suivants:

i. φ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(\varphi) = F$.
ii. φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

5.3 Notion d'équation linéaire

Définition 22.

On appelle **équation linéaire** d'inconnue $x \in E$ toute équation de la forme $f(x) = y_0$, où $f : E \to F$ est une application linéaire et $y_0 \in F$.

Exemple 14.

✗ Toute équation différentielle du type $y' + a(x)y = b(x)$ est une équation linéaire.
✗ Tout système linéaire de n équations à p inconnues est une équation linéaire au sens de la définition ci-dessus.

Proposition 30.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), y_0 \in F$ et $f(x) = y_0$ une équation linéaire. Si x_1 est une solution particulière de cette équation, alors l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes ses solutions vérifie:

$$\mathcal{S} = \{x_1 + u;\ u \in \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Exemple 15.

✗ La solution générale d'une équation différentielle est égale à la somme d'une solution particulière de l'équation, et de la solution générale de l'équation homogène associée.
✗ La solution générale d'un système linéaire est égale à la somme d'une solution particulière du système, et de la solution générale du système homogène associé.

5.4 Caractérisation des isomorphismes, isomorphisme fondamental

Définition 23.

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est appelée l'**image** de $\mathcal{E}$ par f et est notée $f(\mathcal{E})$.

Proposition 31.
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tel que E soit de dimension finie, $\mathcal{E}$ une famille finie de vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathcal{E}$ génère E, alors $f(\mathcal{E})$ génère $\operatorname{Im}(f)$.

Proposition 32.
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a les résultats suivants.
i. f est bijective si, et seulement si, l'image par f de toute base de E est une base de F.
ii. f est bijective si, et seulement si, il existe une base de E dont l'image par f est une base de F.

On en déduit les résultats suivants.

Théorème 6. **Isomorphisme fondamental**
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Il existe un isomorphisme entre E et F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$. En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Exemple 16.
Si l'on dispose d'un isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$, alors $n = p$. Il n'existe par exemple pas d'isomorphisme $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$.

Exercice 14.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \longmapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$ est un isomorphisme.

5.5 Rang d'une application linéaire

Définition 24. **Rang d'une application linéaire**
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie, on appelle **rang** de f, et l'on note $\operatorname{rg}(f)$ la dimension de $\operatorname{Im}(f)$, c'est-à-dire
$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Proposition 33.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. On a alors:
i. $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.
ii. $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$.

Théorème 7. **Théorème du rang**
Soient E et F des espaces vectoriels tels que E est de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors on a
$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E).$$

Remarque 8.
☠ Attention, il est erroné de penser que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires. Déjà car ce ne sont *a priori* pas des sous-espaces du même espace vectoriel, mais même si f est un endomorphisme ce résultat n'est pas vrai en général.

Théorème 8. **Corollaire du Th. du rang pour les endomorphismes**
Soit E un espace vectoriel de **dimension finie**, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a alors les équivalences suivantes:
$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Remarque 9.
Ce résultat n'est pas vrai dans le cas d'une application linéaire quelconque. Par contre, il reste valable dans le cas où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$.

☞ Pour montrer qu'un endomorphisme est un automorphisme, il suffit de vérifier son injectivité ou sa surjectivité, mais il est inutile de vérifier les deux.

5.6 Propriétés des hyperplans

Proposition 34. **Caractérisation d'un hyperplan**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $H \subset E$. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ non nulle.

Corollaire 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de celui-ci, et $H \subset E$. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tels que H admette pour équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 35.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. L'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de dimension supérieure à $n - p$.
Réciproquement, tout sous-espace de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

Exemple 17.

Considérons un système linéaire homogène à p équations et n inconnues. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions associé est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, qui s'écrit comme intersection de p hyperplans (chacune des équations du système caractérise un hyperplan): $\mathcal{S}$ est donc de dimension supérieure à $n - p$.

En particulier, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à deux équations et trois inconnues est soit une droite, soit un plan soit $\mathbb{K}^3$ tout entier.

6 Projecteurs et symétries

6.1 Les projecteurs vectoriels

Définition 25. **Projecteur**

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On appelle **projecteur sur F_1 parallèlement à F_2** l'application $p : E \to E$ définie $p(u_1 + u_2) = u_1$ pour tout $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$.

Cette définition a bien un sens puisque $E = F_1 \oplus F_2$, donc pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.

Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p (resp. q) le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 (resp. sur F_2 parallèlement à F_1). Montrer que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Proposition 36.

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On note alors p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2. On a les résultats suivants:

i. $p \in \mathcal{L}(E)$;
ii. $p \circ p = p$;
iii. $F_2 = \mathrm{Ker}(p)$;
iv. $F_1 = \mathrm{Im}(p)$;
v. $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

☞ Le point *v.* ci-dessus assure que $x \in F_1$ si et seulement si $p(x) = x$ pour tout $x \in E$.

Réciproquement, on a le résultat suivant.

Proposition 37. **Caractérisation des projecteurs**

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Alors $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E, et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

☞ Les projecteurs sont donc les endomorphismes f caractérisés par la relation $f \circ f = f$.

6.2 Les symétries vectorielles

Définition 26. **Symétrie vectorielle**

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On appelle **symétrie par rapport à** F_1 **et parallèlement à** F_2 l'application linéaire $s : E \to E$ définie par $s(u_1 + u_2) = u_1 - u_2$ pour tout $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$.

Proposition 38.

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On note p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 et s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. On a alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Proposition 39.

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On note alors s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. On a les résultats suivants:

i. $s \in \mathcal{L}(E)$;
ii. $s^2 = \mathrm{id}_E$;
iii. $F_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$;
iv. $F_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

☞ Le point *iii.* ci-dessus assure que $x \in F_1$ si et seulement si $s(x) = x$ pour tout $x \in E$.
Le point *iv.* ci-dessus assure que $x \in F_2$ si et seulement si $s(x) = -x$ pour tout $x \in E$.

Réciproquement, on a le résultat suivant.

Proposition 40. **Caractérisation des symétries vectorielles**

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{id}_E$. Alors $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E, et s est la symétrie sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

☞ Les symétries sont donc les endomorphismes f caractérisés par la relation $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Exemple 18.

✗ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'endomorphisme $\tau : M \mapsto M^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

✗ Soit σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sigma(x) = -x$. L'endomorphisme $\Phi : f \mapsto f \circ \sigma$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est la symétrie par rapport à l'ensemble des fonctions paires, parallèlement à l'ensemble des fonctions impaires.

6.3 Famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe

Définition 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} F_k$.

La famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est appelée **famille des projecteurs associés à la décomposition** $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$.

Exemple 19.

Si les F_i sont tous des droites vectorielles, alors ils correspondent aux axes d'un repère, et les p_i sont ainsi les projections sur ces axes.

Proposition 41.

Avec les notations de la **Définition 27.**, on a :

i. $p_1 + \dots + p_n = \mathrm{id}_E$;
ii. $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $i \neq j$ sont des entiers dans $[\![1, n]\!]$.

7 Exercices - Travaux dirigés

Exercice 16.

Soit E est un espace vectoriel $(e_1, \dots, e_n)$ une base de celui-ci, où $n \in \mathbb{N}^*$. Est-ce que $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_3, \dots, e_1+e_n)$ est encore une base de E?

Exercice 17.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si les familles suivantes sont libres dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. $(f_1, \dots, f_n)$ où $f_k : x \mapsto \sin(x+k)$.
2. $(g_1, \dots, g_n)$ où $g_k : x \mapsto \cos(kx)$.

Exercice 18. **Polynômes d'interpolation de Lagrange**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$L_k(X) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)} \times \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i).$$

1. Montrer que pour tout $k \neq j$ dans $[\![0, n]\!]$: $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$, $L_k(a_k) = 1$ et $L_k(a_j) = 0$.
2. Montrer que $L_0, L_1, \dots, L_n$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$ composée de polynômes de degré n.
3. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur à n qui prenne les mêmes valeurs que f en $a_0, \dots, a_n$. Cela permet par exemple de calculer des valeurs approchées d'intégrales.

Exercice 19.

Les ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E considéré ?

1. $E = \mathbb{C}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(0) = 1\}$.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = 0\}$.
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ minorée }\}$.
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ paire }\}$.

Exercice 20.

1. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, puis donner pour chacun d'eux une base et la dimension.

  a. $E = \{(a-b, b, 2a, a+b) \in \mathbb{K}^4;\ (a, b) \in \mathbb{K}^2\}$.
  b. $F = \{x \mapsto \lambda + \mu \ln(x) + \nu e^x;\ (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3\}$.
  c. $G = \mathrm{Vect}\{(1, -2, 1), (-1, 1, -1), (0, 1, 0)\}$.
  d. $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4;\ x - y + 2z + 2t = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$.

2. Déterminer une (ou des) équation(s) cartésienne(s) de l'ensemble E.

Exercice 21.

Montrer que : $\mathrm{Vect}\left((1,1,0); (1,2,1)\right) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y - z = 0\right\}$.

Exercice 22.

Les ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence ? Si oui en déterminer une base et la dimension.

1. $F = \{(a, a+b, a-1, b) \in \mathbb{R}^4 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. $G = \{aX + 2(a+b)X^3 + (a-b)(X-1)^2 \in \mathbb{R}[X] \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{array}\right.\right\}$
4. $I = \left\{f : x \longmapsto a\mathrm{ch}(x) + b\mathrm{sh}(x) + ce^x;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

Exercice 23.

Soient a, b et c des réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad J=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \mathcal{F}=\left\{M=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a+c&b\\c&b&a\end{pmatrix}:\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.
2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J puis montrer que : $\mathcal{F}=\operatorname{Vect}\left(I,A,A^2\right)$.
3. La famille $\left(I,A,A^2\right)$ est-elle libre ?

Exercice 24.

Soient $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $F=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}):\ AM=MA\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F ainsi que la dimension de F.
3. **a.** Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n\in F$.
b. Après avoir vérifié que la famille ci-dessous formait une base de F, déterminer les coordonnées de A^n dans celle-ci.

$$\left(I,\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$$

4. Soit $G=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}):\ {}^tAM=M^tA\}$.
a. Montrer que $M\in G\Leftrightarrow\ {}^tM\in F$.
b. En déduire une base de G ainsi que sa dimension.

Exercice 25.

Pour $0\le k\le n$, on note $P_k(X)=X^k(1-X)^{n-k}$. Le but de l'exercice est de démontrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Quel est le terme de plus bas degré de P_k ?
2. On suppose que la famille $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est liée.
a. Justifier qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_iP_i(X)=0.$$

b. Justifier que l'ensemble $A=\{k\in[\![0;n]\!]:\ \lambda_k\neq 0\}$ défini ci-dessous est non vide,
c. On pose alors $k_0=\min\{k\in A\}$. Quel est le terme de degré k_0 dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\lambda_iP_i(X)$?
d. Conclure.

Exercice 26.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une base de E dont tous les éléments sont dans $E\setminus H$.

Exercice 27.

On pose $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x-y+z=0\}$ et $G=\{(a+b,2a+b,-a);\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et en donner des bases.
Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer une équation cartésienne de G.
3. Montrer que $D=F\cap G$ est une droite vectorielle, en donner un système d'équations et une base.
4. Soit $D'=\operatorname{Vect}((1,1,1))$. Compléter D' en un supplémentaire de D dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 28.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $P\in\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P)=(X^2+1)P'-(2X-\alpha)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer, selon α, le rang de φ.

3. Lorsque $\mathrm{rg}(\varphi) \neq 3$, donner une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + 2f - 3\mathrm{id}_E = 0\ \ (*)$.

1. Montrer qu'il existe deux homothéties, et deux seulement, vérifiant $(*)$.
2. Montrer que $f \in \mathrm{Gl}(E)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{id}_E)$.

Exercice 30.

Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $a : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & XP \end{array}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & u \circ a - a \circ u \end{array}$.

1. Montrer que a est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?
2. Montrer que φ est un endomorphisme non injectif de $\mathcal{L}(E)$.
3. En écrivant une relation entre $u(X^n)$, $u\left(X^{n+1}\right)$ et $\varphi(u)(X^n)$, montrer que φ est surjectif.

Exercice 31.

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ par $\varphi(P) : x \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} P(t)\,\mathrm{d}xt$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, puis déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. En déduire que φ est *nilpotent d'indice* 2 (c'est-à-dire que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$).

Exercice 32. — Indice maximal de nilpotence

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E non nul et nilpotent (c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$). On note p l'indice de nilpotence de f, c'est à dire

$$p = \inf\{k \in \mathbb{N}^* :\ f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}.$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur u (non nul) tel que la famille $(u, f(u), ..., f^{p-1}(u))$ est libre.
2. En déduire que $p \leq n$.

Exercice 33.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer l'équivalence : $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. Comparer, pour l'inclusion, $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Comparer, pour l'inclusion, $\mathrm{Im}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice 34.

Soit E un espace vectoriel, et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer $p \circ q = p \iff \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$.
2. Montrer $q \circ p = p \iff \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 35.

Soient E un espace vectoriel, et p, q deux projecteurs de E.

1. On suppose $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer que $p + q$ est un projecteur.

2. Réciproquement, on suppose que $p + q$ est un projecteur.
  a. Montrer $p \circ q = -q \circ p$.
  b. En déduire $p \circ q \circ p = 0$ puis $p \circ q = q \circ p = 0$.

3. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer alors les relations $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.