2 Courbes paramétrées

1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Dans cette première section, n désigne un entier naturel égal à 2 ou 3. On considère alors l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne, et on fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.
Le produit scalaire canonique est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.
On note aussi d la distance euclidienne associée :

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad d(\vec{x},\ \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Si I est un intervalle réel (non trivial) dont les bornes sont $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, on appelle *adhérence* de I, que l'on note $\overline{I}$, l'ensemble $\overline{I} = I \cup \{a, b\}$.

1.1 Définitions

Définition 1.
Une fonction f définie sur I est dite à valeurs vectorielles s'il existe un espace vectoriel E tel que, pour tout $t \in I$, $f(t) \in E$.

☞ Si E est de dimension finie n, on peut fixer une base de celui-ci. Ainsi, on peut faire correspondre à tout fonction $f:\ I \to E$ à valeurs vectorielle une fonction

$$\vec{f}:\ I \to \mathbb{R}^n$$

telle que, pour tout $t \in I$, $\vec{f}(t)$ est égal aux coordonnées du vecteurs $f(t)$ dans la base choisie. Cette observation permet de se ramener à l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.
Soit $\vec{f}:\ I \to \mathbb{R}^n$. On appelle **fonctions coordonnées** de $\vec{f}$ les fonctions $x_1, ..., x_n$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in I, \qquad \vec{f}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

Exemple 1.
Notons $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel euclidien usuel et $(\vec{i},\ \vec{j})$ sa base canonique.
La fonction $f:\ t \in [0, 2\pi[\ \longmapsto \cos(t)\ \vec{i} + \sin(t)\ \vec{j}$ est une fonction à valeurs vectorielles qui correspond à l'application $\vec{f}:\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions coordonnées sont $x_1:\ t \mapsto \cos(t)$ et $x_2 : t \mapsto \sin(t)$.

1.2 Limites et continuité

Sans surprise, la notion de limite étend celle qu'on connait déjà à l'aide de la distance d donnée par la norme; on dira que $\vec{f}(t)$ tend vers $\vec{\ell}$ si la distance entre les deux vecteurs tend vers 0.

Définition 3.
Soient $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ à valeurs vectorielles, $\vec{\ell}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \overline{I}$.
On dit que $\vec{f}(t)$ tend vers $\vec{\ell}$ lorsque t tend vers α, ce qu'on note $\lim\limits_{t\to\alpha} \vec{f}(t) = \ell$ si

$$\lim_{t\to\alpha} d\left(\vec{f}(t),\ \vec{\ell}\right) = 0$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{t\to\alpha} \|\vec{f}(t) - \vec{\ell}\| = 0.$$

Cette notion de limite se ré-exprime à l'aide des fonctions coordonnées. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 1.
Soient $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$, $x_1, ..., x_n$ ses fonctions coordonnées, ℓ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(\ell_1, ..., \ell_n)$, et $\alpha \in \overline{I}$.
Alors,

$$\lim_{t\to\alpha} \vec{f}(t) = \ell \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lim_{t\to\alpha} x_i(t) = \ell_i.$$

Preuve. Commençons par observer que, pour tout $t \in I$,

$$\|\vec{f}(t) - \vec{\ell}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \ell_i)^2}.$$

Le sens $\Leftarrow$ est immédiat par continuité de la fonction carrée puis par somme et continuité de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$.
Réciproquement, supposons $\|\vec{f}(t) - \vec{\ell}\| \longrightarrow 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$0 \leq (x_i - \ell_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \ell_i)^2 \underset{t\to\alpha}{\longrightarrow} 0,$$

par hypothèse et continuité de la fonction carrée.
Le théorème des gendarmes permet de conclure. □

Maintenant qu'on dispose de la notion de limite, on peut définir la notion de continuité pour une fonction à valeurs vectorielles.

Définition 4.
Soient $\vec{f} : \to \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. On dit que $\vec{f}$ est **continue en** t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$.

Si $\vec{f}$ est continue en tout point $t_0 \in I$, on dit alors que $\vec{f}$ **est continue sur** I.

La proposition ci-dessous donne immédiatement le résultat suivant qui permet d'affirmer que la continuité d'une fonction à valeurs vectorielles est caractérisée par la continuité de ses fonctions coordonnées.

Proposition 2.
Soient $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$, $x_1, ..., x_n$ ses fonctions coordonnées et $t_0 \in \overline{I}$.
Alors,

$$\vec{f} \text{ est continue en } t_0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \text{ est continue en } t_0.$$

Les théorèmes généraux sur la continuité des fonctions d'une variable réelle s'étendent alors de manière immédiate aux fonctions à valeurs vectorielles.

Proposition 3. **Théorèmes généraux**
La somme, le produit par un scalaire, le produit scalaire, le produit vectoriel (s'il est défini) de fonctions à valeurs vectorielles continues sur I est encore une fonction (à valeurs vectorielles) continue sur I.

1.3 Dérivabilité

Définition 5.
Soient $\vec{f}:\ I \to \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. On dit que $\vec{f}$ est **dérivable en** t_0 si

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\left(\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)\right)$$

existe et est finie (et élément de $\mathbb{R}^n$). Auquel cas, cette limite sera notée

$$\vec{f}\,'(t_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

Si $\vec{f}$ est dérivable en tout point $t_0 \in I$, on dit alors que $\vec{f}$ **est dérivable sur** I et la fonction $\vec{f}'$ est appelée **dérivée de** $\vec{f}$.

Comme précédemment avec la continuité, on établit une caractérisation de la dérivabilité de $\vec{f}$ sur ses fonctions coordonnées.

Proposition 4.
Soient $\vec{f}:\ I \to \mathbb{R}^n$, $x_1, ..., x_n$ ses fonctions coordonnées et $t_0 \in \overline{I}$.
Alors,

$$\vec{f} \text{ est dérivable en } t_0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \text{ est dérivable en } t_0.$$

Lorsque c'est le cas, on a même

$$\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t_0) = (x_1'(t_0), ..., x_n'(t_0)).$$

☞ **Pour dériver une fonction à valeurs vectorielles, il suffit donc de dériver ses fonctins coordonnées.**

Preuve. Il suffit d'observer que, pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$,

$$\frac{1}{t-t_0}\left(\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)\right) = \frac{1}{t-t_0}\left(x_1(t)-x_1(t_0), ..., x_n(t)-x_n(t_0)\right)$$

et d'appliquer le résultat de la **Proposition 2.** avec la définition de dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles. □

La dérivation coordonnée par coordonnée permet notamment d'obtenir les résultats suivants.

Proposition 5. **Théorèmes généraux**
Soient $\vec{f}, \vec{g}:\ I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions dérivables sur I, $\lambda\mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$, où J est un intervalle (non trivial) de $\mathbb{R}$.
Alors,

(*i*) $\lambda\vec{f} + \mu\vec{g}$ est encore dérivable sur I, et $\left(\lambda\vec{f} + \mu\vec{g}\right)' = \lambda\vec{f}\,' + \mu\vec{g}\,'$.

(*ii*) $\vec{f} \circ \varphi$ est dérivable sur I, et $\left(\vec{f} \circ \varphi\right)' = \varphi' \times \left(\vec{f}\,' \circ \varphi\right)$.

(*iii*) La fonction $t \in I \mapsto \langle \vec{f}(t) \mid \vec{g}(t)\rangle$ est dérivable sur I et $\langle \vec{f} \mid \vec{g}\rangle' = \langle \vec{f}\,' \mid \vec{g}\rangle + \langle \vec{f} \mid \vec{g}\,'\rangle$.

(*iv*) Si elle a un sens, la fonction $t \in I \mapsto \det(\vec{f}(t),\ \vec{g}(t))$ est dérivable sur I et $\det(\vec{f},\ \vec{g})' = \det(\vec{f}\,',\ \vec{g}) + \det(\vec{f},\ \vec{g}\,')$.

(*v*) Si elle a un sens, la fonction $t \in I \mapsto \vec{f}(t) \wedge \vec{g}(t)$ est dérivable sur I et $\left[\vec{f} \wedge \vec{g}\right]' = \vec{f}\,' \wedge \vec{g} + \vec{f} \wedge \vec{g}\,'$.

(*vi*) Si, pour tout $t \in I$, $\vec{f}(t) \neq \vec{0}$, alors $t \mapsto \|\vec{f}(t)\|$ est dérivable sur I et $\|\vec{f}\|' = \dfrac{\langle \vec{f}\,' \mid \vec{f}\rangle}{\|\vec{f}\|}$.

1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et formule de Taylor-Young

Définition 6.

Soient $\vec{f}:\ I \to \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (sur I) si $\vec{f}$ est dérivable k fois (sur I) et si sa dérivée $k-$ème $\vec{f}^{\,(k)}$ est continue (sur I).
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sera noté $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$.
Enfin, on dit que $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (sur I) si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ (sur I) pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
Lorsque $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (sur I), on note aussi, pour $t \in I$,

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^k f}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{f}^{\,(k)}(t).$$

Naturellement, encore une fois, la fonction $\vec{f}$ sera de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées le sont, et on obtient l'expression de $\vec{f}^{\,(k)}$ à l'aide des dérivées $k-$ème des fonctions coordonnées de $\vec{f}$.

$$\forall t \in I, \qquad \vec{f}^{\,(k)}(t) = (x_1^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)).$$

Proposition 6. **Formules de Leibniz**

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\vec{f}, \vec{g}:\ I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ sur I. Alors, $\langle \vec{f} \mid \vec{g} \rangle$ et $\vec{f} \wedge \vec{g}$ sont encore de classe $\mathcal{C}^m$ sur I, et

$$\left\langle \vec{f} \mid \vec{g} \right\rangle^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \left\langle \vec{f}^{\,(k)} \mid \vec{g}^{\,(m-k)} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad \left(\vec{f} \wedge \vec{g}\right)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \vec{f}^{\,(k)} \wedge \vec{g}^{\,(m-k)}.$$

Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ sur I, alors $t \mapsto \varphi(t)\vec{f}(t)$ est encore de classe $\mathcal{C}^m$ sur I et

$$\left(\varphi \vec{f}\right)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \varphi^{(k)} \vec{f}^{\,(m-k)}.$$

Preuve. La démonstration est admise mais le résultat se montre par récurrence. □

Théorème 1. **Formule du Taylor-Young**

Soient $m \in \mathbb{N}$, $\vec{f}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ sur I et $t_0 \in I$. Alors, pour tout h dans un voisinage de 0, on peut écrire

$$\vec{f}(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} \frac{\vec{f}^{\,(k)}(t_0)}{k!} h^k + \overrightarrow{o(h^m)},$$

où $\overrightarrow{o(h^m)}$ désigne un vecteur dont toutes les coordonnées sont négligeables devant h^m.

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Young à chaque fonction coordonnées de $\vec{f}$. □

☞ **On obtient les développements limités des fonctions à valeurs vectorielles en calculant les développements limités coordonnée par coordonnée.**

Exercice 1.

Déterminer le développement limité de la fonction

$$\vec{f}:\ t \in]-\pi;\pi[\longmapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

1.5 Interprétation cinématique

Remarque 1.

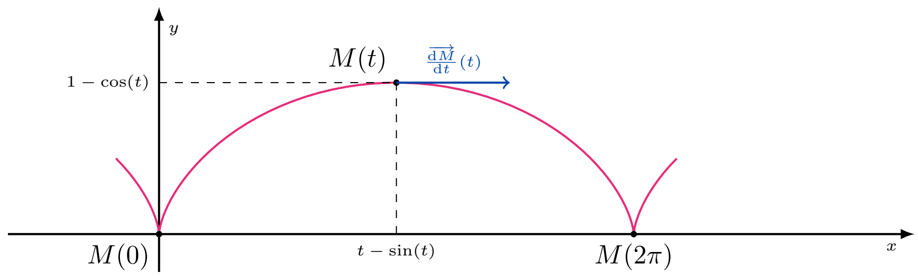
Lorsque l'on étudie le déplacement d'un mobile dans le plan, sa position en fonction du temps est donnée par une fonction $M:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ qui sera dite à **valeurs ponctuelles**.
Les fonctions coordonnées x et y de M donnent, à l'instant t, les coordonnées du point $M(t)$ où se trouve le mobile.
Le vecteur $M'(t) = (x'(t), y'(t))$ est alors le *vecteur vitesse* du mobile à l'instant t; puisqu'il s'agit cette fois d'une fonction à *valeurs vectorielles* (et non plus ponctuelles), on notera $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t)$ la dérivée de M à l'instant t.

Le graphe (ou **courbe**) de M représente alors la *trajectoire* du mobile.

La figure ci-dessous représente la trajectoire d'un mobile donnée par la fonction

$$M : t \mapsto (t - \sin(t),\ 1 - \cos(t))\,.$$

Le vecteur vitesse est donné, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t) = (1 - \cos(t),\ \sin(t))$.



2 Arcs (ou courbes) paramétré(e)s du plan

2.1 Définitions et exemples

Définition 7.
On appelle **arc (ou courbe) paramétré(e)** (de classe $\mathcal{C}^k$) toute partie γ de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$\gamma = \{M(t) \mid t \in I\},$$

où $M : I \to \mathbb{R}^2$ est une fonction à valeurs ponctuelles de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

M est appelé **un paramétrage** de γ et, réciproquement, γ est appelé **support** (ou trajectoire) de M.

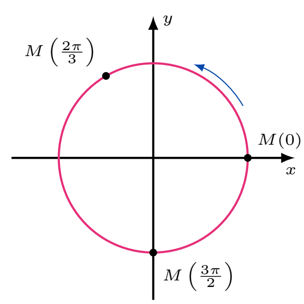
Pour tout $t \in I$, le point $M(t)$ de γ sera appelé le point de paramètre t de γ.

Si $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ désignent les fonctions coordonnées de M, on dira que $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right.$, $t \in I$ est un paramétrage de γ.

Exemple 2.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos(t) \\ y(t) & = & \sin(t) \end{array}\right., \ t \in [0, 2\pi[$$

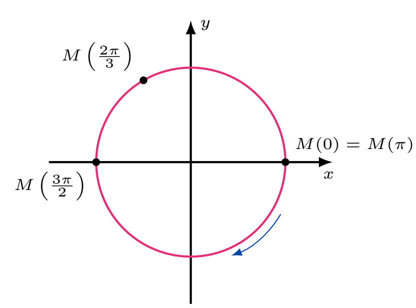
est un paramétrage du cercle unité. Le cercle est parcouru dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre).



Exemple 3.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos(-2t) \\ y(t) & = & \sin(-2t) \end{array}\right., \ t \in [0, 2\pi[$$

est un autre paramétrage du cercle unité. Le cercle est parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.

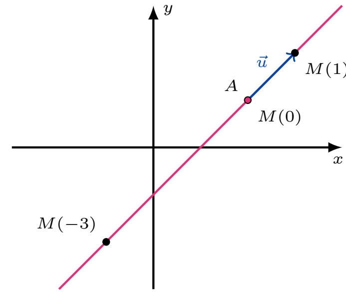


Exemple 4.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & a+\alpha t \\ y(t) & = & b+\beta t \end{array}\right. , \ t \in [0, 2\pi[$$

est un paramétrage de la droite passant par le point $A(a, b)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ (que l'on note aussi $A + \mathbb{R}\vec{u}$) et d'équation

$$\beta(x-a) - \alpha(y-b) = 0.$$

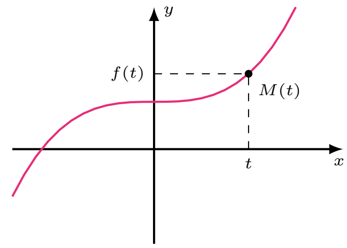


Exemple 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & f(t) \end{array}\right. , \ t \in I$$

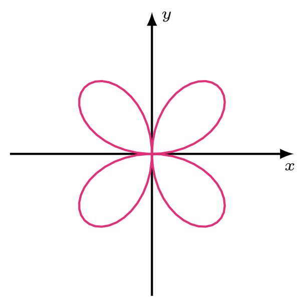
est un paramétrage de la courbe représentative de f.



Exemple 6.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 2\sin^2(t)\cos(t) \\ y(t) & = & 2\cos^2(t)\sin(t) \end{array}\right. , \ t \in [0, 2\pi[$$

est un paramétrage du *quadrifolium*, ou trêfle à quatre feuilles.



2.2 Points simples, points multiples d'une courbe paramétrée

Définition 8.
On considère une courbe γ paramétrée par $M : I \to \mathbb{R}^2$. Un point A de γ est appelé **point multiple** s'il existe (au moins) deux réels (distincts) t_1 et t_2 tels que $M(t_1) = M(t_2)$ et $t_2 - t_1$ n'est pas une période pour M.
On dira plus précisément que $M(t)$ est double s'il correspond à deux valeurs distinctes du paramètres, triple s'il correspond à trois valeurs distinctes du paramètre, etc...
Un point qui n'est pas multiple est dit **simple**.

Exemple 7.
Dans l'**Exemple 2**, tous les points sont simples.
Dans l'**Exemple 6**, le point $O(0, 0)$ est multiple; on y passe quatre fois (on dira qu'il est quadruple).

Exercice 2.

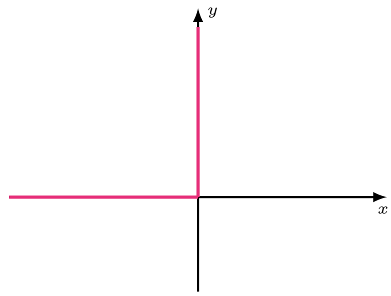
Déterminer les éventuels points doubles de la courbe paramétrée par $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 3t^3+2t^2-t-1 \\ y(t) & = & 3t^2+2t+1 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}$.

2.3 Tangente en un point

Afin de motiver la définition qui va suivre, observons un exemple de courbe paramétrée. Considérons la courbe γ paramétrée par $M:\ t \mapsto (x(t), y(t))$ où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \begin{cases} -t^2, & \text{si } t < 0 \\ 0, & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ t^2, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

dont la représentation est la suivante.



Bien que M soit dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) en tout point $t \in \mathbb{R}$, on observe que γ n'admet pas de tangente au point $O(0,0)$.

Définition 9.
Soit γ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ paramétrée par $M:\ I \to \mathbb{R}^2$. On dit que le point $M(t_0)$ de paramètre $t_0 \in I$ est un **point régulier** de γ si

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \vec{0}.$$

Sinon, le point est dit **singulier** (ou stationnaire).
Une courbe paramétrée γ est dite **régulière** si tous ses points sont réguliers.

Si γ est de classe $\mathcal{C}^2$, le point $M(t_0)$ est dit **birégulier** si la famille

$$\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0), \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2}(t_0)\right)$$

est libre.

Afin de donner la définition qui va suivre, on rappelle que si A est un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul, la droite dirigée par $\vec{u}$ et passant par A est notée $A + \mathbb{R}\vec{u}$.

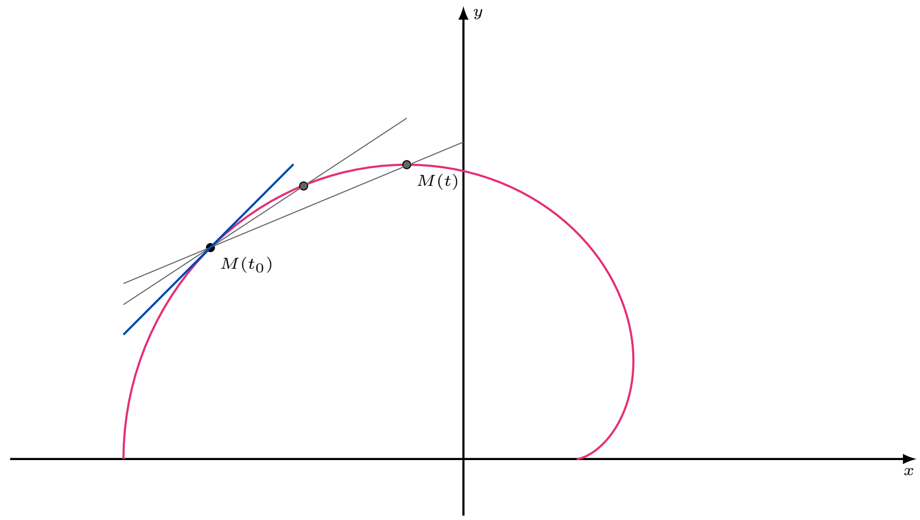
On dit que la courbe γ paramétrée par $M:\ I \to \mathbb{R}^2$ admet une tangente en $M(t_0)$ si la droite $(M(t_0)M(t))$ admet une *position limite* lorsque t tend vers t_0; auquel cas la droite limite est la tangente.

Définition 10.
Soient γ une courbe paramétrée par $M:\ I \to \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$. On note $\vec{d}(t)$ un vecteur unitaire, directeur de la corde $(M(t_0)M(t))$.

(i) Si $\vec{d}(t)$ admet une limite finie $\vec{d}_0^+ \in \mathbb{R}^2$ lorsque $t \to t_0^+$, on dit γ admet la droite $M(t_0) + \mathbb{R}\vec{d}_0^+$ comme **tangente à droite** en $M(t_0)$;

(ii) Si $\vec{d}(t)$ admet une limite finie $\vec{d}_0^- \in \mathbb{R}^2$ lorsque $t \to t_0^-$, on dit γ admet la droite $M(t_0) + \mathbb{R}\vec{d}_0^-$ comme **tangente à gauche** en $M(t_0)$;

(iii) Si les tangentes à droite et à gauche existent et sont une seule et même droite $M(t_0) + \mathbb{R}\vec{d}_0$, celle-ci est appelée **tangente** en $M(t_0)$ à la courbe.



Proposition 7.
Soit γ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ paramétrée par $M : I \to \mathbb{R}^2$. Alors, en tout point régulier $M(t_0)$ de γ. Plus précisément, la droite

$$M(t_0) + \mathbb{R}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

est tangente à γ au point $M(t_0)$.

Preuve. Soit $M(t_0)$ un point régulier. Si $t \in I, t \neq t_0$, un vecteur directeur unitaire de la corde $(M(t_0)M(t)$ est donné par

$$\begin{array}{rcl}\vec{d}(t) & = & \dfrac{1}{\|M(t_0) - M(t)\|}(x(t) - x(t-0), y(t) - y(t_0)) \\ & = & \dfrac{t - t_0}{\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2 + (y(t)-y(t_0))^2}}\left(\dfrac{x(t)-x(t_0))}{t-t_0}, \dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right) \\ & = & \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}}\left(\dfrac{x(t)-x(t_0))}{t-t_0}, \dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right) \\ & \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} & \dfrac{\pm 1}{\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right\|}(x'(t_0), y'(t_0)) =: \vec{d}_0^{\pm}.\end{array}$$

On aura observé que, comme $M(t_0)$ est supposé régulier, $\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right\| \neq 0$. Comme les deux droites sont les mêmes :

$$M(t_0) + \mathbb{R}\vec{\mathrm{d}}_0^+ = M(t_0) + \mathbb{R}\vec{\mathrm{d}}_0^-,$$

on a bien le résultat énoncé. □

Exercice 3.
Déterminer une équation de la tangente en un point quelconque de la courbe γ paramétrée par

$$M : t \longmapsto \left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos(t) \\ y(t) & = & \sin(t)\end{array}\right., \; t \in [0, 2\pi[.$$

Vérifier ensuite qu'elle est perpendiculaire à la droite $(OM(t_0))$, où O désigne l'origine du repère (et le centre du cercle dont M est une paramétrisation).

Exemple 8.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse t_0 est également la tangente à la courbe γ paramétrée par $M : t \in I \mapsto (t, f(t))$ au point $M(t_0)$ et a pour vecteur directeur

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0) = (1, f'(t_0)).$$

On retrouve bien que $f'(t_0)$ en est le coefficient directeur.

☞ Une courbe paramétrée peut avoir une tangente verticale, contrairement à ce à quoi on est habitué pour des graphes de fonctions d'équation $y = f(x)$.

Exercice 4.
Trouver les points où la tangente à la courbe de Lissajous, paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sin(2t) \\ y(t) & = & \sin(3t) \end{array}\right., \ t \in [-\pi, \pi]$$

est verticale, puis horizontale.

Remarque 2.
Si on écrit la formule de Taylor-Young (ou le développement limité), à l'ordre 1, en t_0, pour le paramétrage M d'un courbe γ, on a

$$M(t) = M(t_0) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0)(t - t_0) + \overrightarrow{o(t - t_0)}.$$

Notamment, la *partie principale* correspond au paramétrage de la tangente à γ en $M(t_0)$.

Remarque 3.
La notion de tangente en un point multiple n'a pas toujours de sens, car il peut y avoir différentes tangentes en un tel point, chacune étant associée à une valeur différente du paramètre en lequel le point est atteint.
Il faudra donc, le cas échéant, toujours préciser en quelle valeur du paramètre on calcule la tangente.

2.4 Étude locale aux points singuliers

Considérons un point singulier $M(t_0)$ (c'est à dire que $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \vec{0}$).
Comme le vecteur dérivée est nul, il n'est d'aucune utilité pour la recherche d'une tangente ; il parait naturel de chercher à préciser les termes suivants dans le développement limité de M. Notons alors

$$p = \min\left\{k : \ \frac{\mathrm{d}^k\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^k}(t_0) \neq \vec{0}\right\}.$$

On peut alors écrire, pour t au voisinage de t_0,

$$M(t) = M(t_0) + \frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)\frac{(t - t_0)^p}{p!} + \overrightarrow{o\left((t - t_0)^p\right)}$$

et, dans ce cas, la courbe paramétrée $t \mapsto M(t_0) + \frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)\frac{(t - t_0)^p}{p!}$ est la (demi-)tangente à γ en $M(t_0)$.
En effet, si p est pair, il s'agit d'une demi-droite et parler de tangente est donc ambigu (on parlera plutôt de *rebroussement*).
Il nous faut alors une seconde direction pour préciser ce qui se passe. Le résultat est alors le suivant.

Proposition 8.
Soient $n \geq 2$ un entier, $M : I \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage de classe $\mathcal{C}^n$ d'une courbe γ et $t_0 \in I$.
On suppose qu'il existe deux entiers $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que

$$p = \min\left\{k : \ \frac{\mathrm{d}^k\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^k}(t_0) \neq \vec{0}\right\}, \qquad q = \min\left\{k : \ \left(\frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0), \ \frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)\right) \text{ est libre }\right\}.$$

Alors, on a les cas de figure suivants (illustrés ci-après) :

(i) Si p est impair et que q est pair, on a un **point d'allure ordinaire**;
(ii) Si p est impair et que q est impair, on a un **point d'inflexion**;
(iii) Si p est pair et que q est impair, on a un **point de rebroussement de première espèce**;
(iv) Si p est pair et que q est pair, on a un **point de rebroussement de seconde espèce**.

Preuve. La démonstration repose sur le développement limité obtenu ci-avant ; pour t au voisinage de t_0,

$$M(t) \quad = \quad M(t_0) + \frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)\frac{(t - t_0)^p}{p!} + \ldots + \frac{\mathrm{d}^q\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^q}(t_0)\frac{(t - t_0)^q}{q!} + (t - t_0)^q\vec{\varepsilon}(t - t_0),$$

où $\vec{\varepsilon}$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, continue au voisinage de t_0 telle que $\lim\limits_{h \to 0} \|\vec{\varepsilon}(h)\| = 0$.
Pour alléger les notations, notons

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}^p \overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0), \qquad \vec{w} = \frac{\mathrm{d}^q \overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^q}(t_0).$$

Observons que si l'on note $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ vers la base $(\vec{v}, \vec{w})$, alors, les coordonnées de $\vec{\varepsilon}(t - t_0)$ dans cette nouvelle base tendent encore vers 0 lorsque $t \to t_0$:

$$\|P^{-1}\vec{\varepsilon}(h)\| \leq \|P\|_2 \|\vec{\varepsilon}(h)\| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

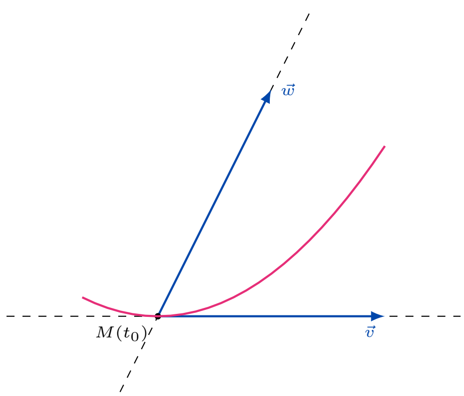
Notons alors $(X(t), Y(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $\mathcal{R}' = (M(t_0), \vec{v},\ \vec{w})$.
On a donc immédiatement, d'une part,

$$Y(t) = \frac{(t - t_0)^q}{q!} + o((t - t_0)^q).$$

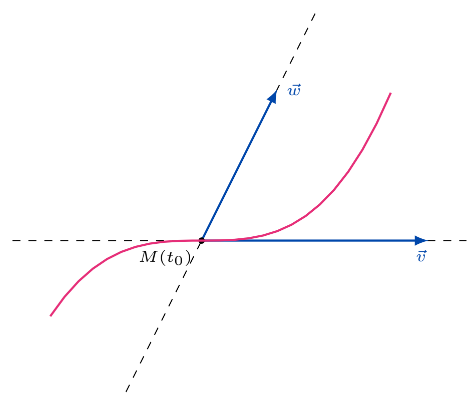
Comme, pour tout $k \in [\![p, q-1]\!]$, $\dfrac{\mathrm{d}^k \overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^k}(t_0)$ est colinéaire à $\dfrac{\mathrm{d}^p \overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$ et que, pour $k \geq p$, $(t - t_0)^k = o\left((t - t_0)^p\right)$ (lorsque $t \to t_0$), on a aussi

$$X(t) = \frac{(t - t_0)^p}{p!} + o((t - t_0)^p).$$

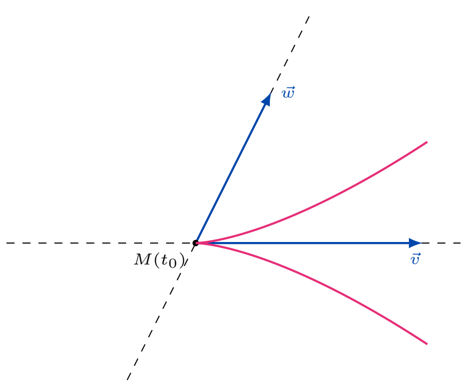
En $M(t_0)$, γ admet alors une tangente de vecteur directeur $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}^p \overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$. La position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par les parités de p et q, ce qu'on représente avec les figures ci-dessous. On a un des quatre cas de figure suivants :



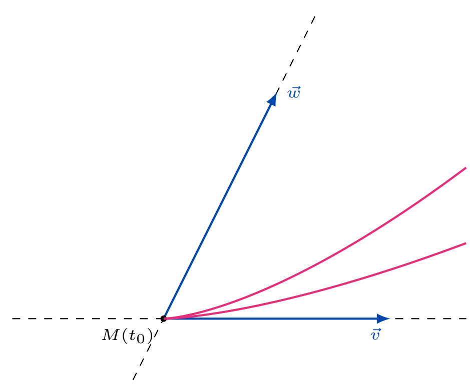
(i) p impair, q pair
point d'allure normale



(ii) p impair, q impair
point d'inflexion



(iii) p pair, q impair
point de rebroussement de première espèce



(iv) p pair, q pair
point de rebroussement de seconde espèce

□

Remarque 4.

- Tout point birégulier est un point d'allure normale (car on a dans ce cas $p = 1, q = 2$).
- Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente.
Si la courbe est régulière (*i.e.* pas de point singulier), les points d'inflexion sont à chercher parmi ceux pour lesquels
$$\frac{\mathrm{d}^p \overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0), \quad \text{et} \quad w = \frac{\mathrm{d}^q \overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^q}(t_0)$$
sont colinéaires.
- Un point de rebroussement est un point où les demi-tangentes à droite et à gauche sont une même demi-droite. Il s'agit toujours d'un point singulier. Mais un point singulier n'est pas toujours un point de rebroussement !
- Lorsque cela permet un calcul plus simple, on peut écrire ne développement limité de $M(t)$ pour lire immédiatement les valeurs de p et q.
- Si la limite
$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \left(= \lim_{t \to t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \ell$$
existe et est finie, alors ℓ est le coefficient directeur de la tangente à γ en $M(t_0)$. Si la limite précédente existe et est infinie, la tangente est verticale.

Exercice 5.
Étudier le point singulier à l'origine de chacune des courbes ci-dessous :

1. γ_1 paramétrée par $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & t^2 \\ y(t) & = & t^5 \end{array} \right.$.

2. γ_2 paramétrée par $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & t^5 \\ y(t) & = & t^3 \end{array} \right.$.

3. γ_3 paramétrée par $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & t^2 \ln(1+t) \\ y(t) & = & t^2 \left(\exp(t^2) - 1\right) \end{array} \right.$.

Exercice 6.
Déterminer et étudier les points singuliers de la courbe γ paramétrée par $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & t^2 - t^3 \\ y(t) & = & t^2 + t^3 \end{array} \right.$.

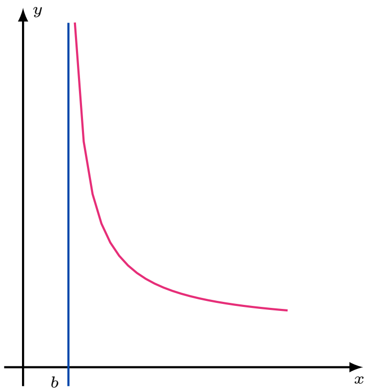
2.5 Branches infinies

Définition 11.
Soient $M : I \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage d'une courbe γ et $t_0 \in \overline{I}$. On note $x, y : I \to \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées de M. On dit que M a une **branche infinie** en t_0 lorsque
$$\lim_{t \to t_0} M(t) = \lim_{t \to t_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = \lim_{t \to t_0} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = +\infty$$
ce qui revient au même de dire qu'au moins l'une des fonction $t \mapsto |x(t)|$ ou $t \mapsto |y(t)|$ tend vers l'infini lorsque $t \to t_0$.

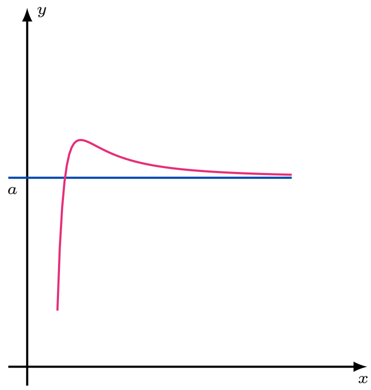
Pour chaque branche infinie, on cherche s'il existe une asymptote, c'est à dire une droite que va venir *épouser* la courbe, c'est à dire avec laquelle la distance tend vers 0 lorsque $t \to t_0$. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 12.
Soient $t_0 \in \overline{I}$, $M : I \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage d'une courbe γ admettant une branche infinie en t_0. On dit que la droite $\mathcal{D}$ est **asymptote** à la courbe γ en t_0 si
$$\lim_{t \to t_0} d\left(M(t), \mathcal{D}\right) = 0.$$

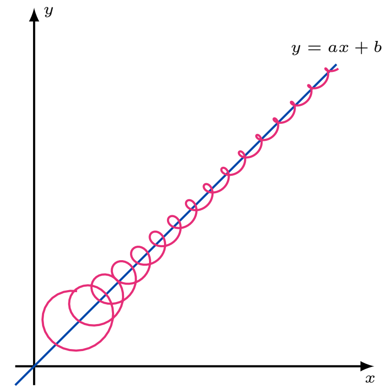
Une asymptote peut être verticale, horizontale ou oblique, comme on peut le voir avec les illustrations ci-dessous.



Asymptote verticale :
$x(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} b^+$ et $y(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} +\infty$.

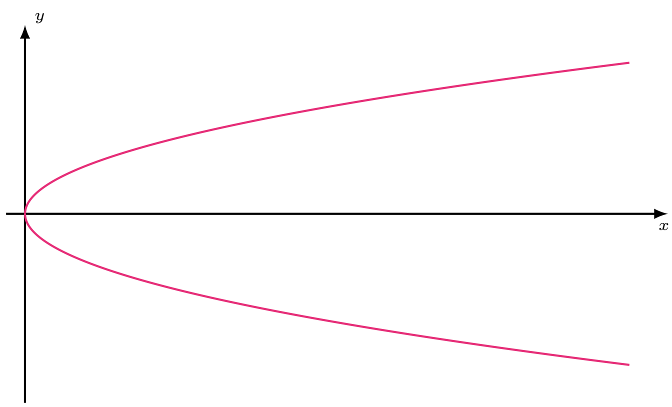


Asymptote horizontale :
$x(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} a^+$.



Asymptote oblique :
$[y(t) - (ax(t) + b)] \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$.

☞ **Attention**, une branche infinie peut ne pas admettre de droite asymptote (comme dans le cas d'une parabole), on parle alors *branche parabolique* de direction une certaine droite.



Branches paraboliques de direction horizontale :
$y(t) = o(x(t)),\ t \to \pm\infty$.

☞ **Pour déterminer la nature de la branche infinie**, en t_0; on forme le quotient $\dfrac{y(t)}{x(t)}$:

- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, on dira que γ admet une branche parabolique de direction (verticale) (Oy).
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$, on dira que γ admet une branche parabolique de direction (horizontale) (Ox).
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$, et que $y(t) - ax(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$, on dira que γ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$.
  Dans ce cas, il est nécessaire d'étudier le signe de $y(t) - (ax(t) + b)$ lorsque $t \to t_0$ pour connaître la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$, et que $y(t) - ax(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, on dira que γ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Exercice 7.

Étudier la branche infinie de la courbe γ paramétrée par $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3+1}{t^2+1} \\ y(t) &= \dfrac{t^3+t^2}{t^2+1} \end{cases}$ lorsque $t \to +\infty$.

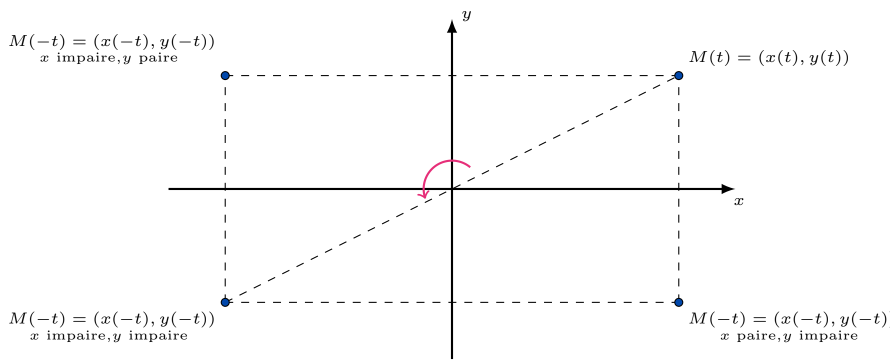
2.6 Réduction du domaine d'étude

Considérons une courbe γ paramétrée par $M:\ I \to \mathbb{R}^2$ dont les fonctions coordonnées sont notées x et y.

Il est clair que si x et y sont toutes deux des fonctions $T-$**périodiques** définies sur $I=\mathbb{R}$, il suffit d'étudier x et y sur $[0,T]$ (ou tout autre intervalle d'amplitude T) puis de tracer la courbe paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x(t) \\ y &=& y(t) \end{array}\right. ,\quad t\in[0;T].$$

D'autres observations et transformations géométriques permettent de réduire le domaine d'étude et d'obtenir γ à partir de l'arc paramétré réduit auquel on fait subir les transformations géométriques susmentionnées.

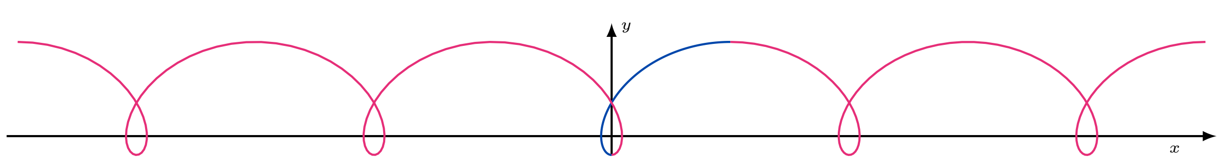


- Si x et y sont toutes les deux paires, on restreint le domaine d'étude à $I\cap\mathbb{R}_+$. La courbe ainsi tracée est complète.
- Si x et y sont toutes les deux impaires, on restreint le domaine d'étude à $I\cap\mathbb{R}_+$. On complète ensuite la courbe ainsi tracée par symétrie de centre O.
- x est paire et y est impaire, on restreint le domaine d'étude à $I\cap\mathbb{R}_+$. On complète ensuite la courbe ainsi tracée par symétrie d'axe (Ox).
- x est impaire et y est paire, on restreint le domaine d'étude à $I\cap\mathbb{R}_+$. On complète ensuite la courbe ainsi tracée par symétrie d'axe (Oy).
- Si le changement de t en $a+b-t$ fait apparaître une transformation géométrique permettant de passer de $M(t)$ à $M(a+b-t)$, on restreint le domaine d'étude de $I=[a,b]$ à $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, et on complète ensuite la courbe en appliquant cette transformation.
- Si le changement de t en $1/t$ fait apparaître une transformation géométrique permettant de passer de $M(t)$ à $M(1/t)$, on restreint le domaine d'étude de $I=]0,+\infty[$ à $]0,1[$, et on complète ensuite la courbe en appliquant cette transformation.
- Si, pour tout $t\in I=\mathbb{R}$, $M(t+T)=M(t)+\vec{u}$, on restreint de domaine d'étude à $[0,T]$ et on complète la courbe par translations de vecteurs $k\cdot\vec{u}$, pour $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 8.

Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe γ paramétrée par $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& t-\dfrac{3}{2}\sin(t) \\ y(t) &=& 1-\dfrac{3}{2}\cos(t) \end{array}\right.$.

On pourra ensuite expliquer la construction de la courbe sur la figure ci-dessous.



2.7 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Pour étudier une courbe paramétrée, en général, on suit le plan d'étude suivant :

1. On détermine l'ensemble de définition puis le domaine d'étude le plus simple possible.

2. On étudie les fonctions coordonnées x et y, on trace le tableau de variations à 5 lignes :

t	
$x'(t)$	
x	
$y'(t)$	
y	

3. On étudie les éventuels points singuliers.

4. On étudie les éventuelles branches infinies et les tangentes aux points qui apparaissent dans le tableau de variations.

5. Réalisation d'un brouillon du tracé. Pour cela :

- Si x croît et y croît, on va vers la droite et vers le haut.
- Si x croît et y décroît, on va vers la droite et vers le bas.
- Si x décroît et y croît, on va vers la gauche et vers le haut.
- Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas

Le brouillon du tracé permet notamment de faire apparaître d'éventuels points multiples, dont on vérifiera l'existence par le calcul.

6. Construction méticuleuse de la courbe, asymptotes et tangentes, en utilisant éventuellement les transformations géométriques qui auraient pu permettre de réduire le domaine d'étude.

2.8 Un exemple d'étude complète : le folium de Descartes

On étudie dans cette dernière question la courbe γ paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) & = & \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

1. Les fonctions coordonnées sont toutes deux définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t), \qquad y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t).$$

Comme l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ est bijective de $]-1,1]$ sur $\mathbb{R}\backslash]-1;1]$, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $]-1,1]$. On complètera ensuite le tracé par symétrie par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

2. On a, pour tout $t \in]-1,1]$,

$$x'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \qquad y'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2},$$

ce qui donne sans difficulté le tableau de variations ci-dessous :

t	-1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		1
$x'(t)$	||	$+$		$+$	0	$-$	
x	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$3/2$
$y'(t)$	||	$-$	0	$+$		$+$	
y	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$3/2$

3. Il n'y a pas de point singulier.

4. Branches infinies et tangentes.
Lorsque t tend vers -1, on a $x(t) \underset{t\to-1}{\longrightarrow} -\infty, \qquad y(t) \underset{t\to-1}{\longrightarrow} +\infty.$

On a donc une branche infinie en -1 (et on remarque que c'est la seule). Comme $\lim\limits_{t\to-1} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$, puis que

$$y(t) - (-x(t)) = \frac{3t}{t^2 - t + 1} \underset{t\to-1}{\longrightarrow} -1,$$

la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à la courbe. On peut même préciser que,

$$y(t) - (-x(t) - 1) = \frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} > 0,$$

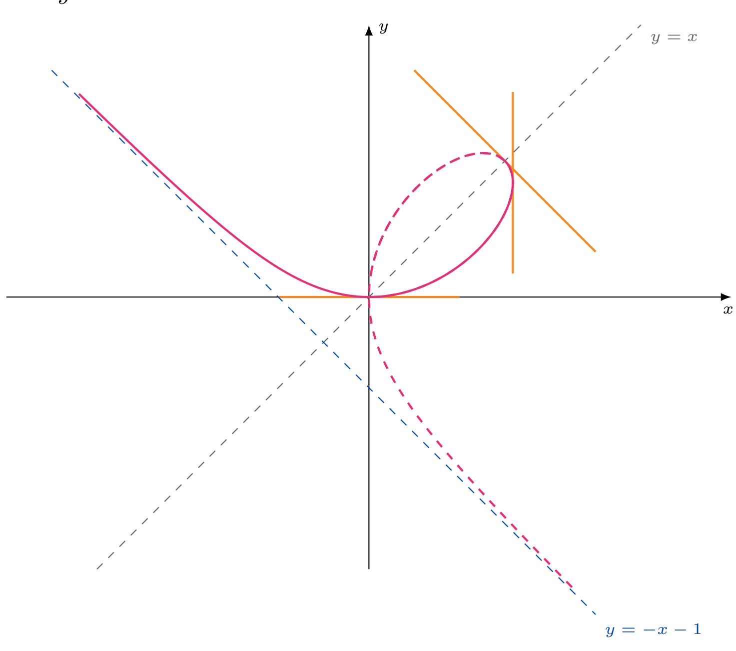
donc γ est au dessus de son asymptote.

En $M(0)$, la tangente à γ a pour coefficient directeur $\dfrac{y'(0)}{x'(0)} = 0$ et on a une tangente horizontale.

En $M\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \underset{t\to\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\longrightarrow} \infty$, on a donc une tangente verticale au point $M\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

En $M(1)$, la tangente à γ a pour coefficient directeur $\dfrac{y'(1)}{x'(1)} = -1$.

5. On peut tracer la courbe. On s'aide de l'asymptote et des tangentes. Puis on complète par symétrie par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



Exercice 9.

On cherche à représenté la courbe γ paramétrée par $M\ :\ t \longmapsto \begin{cases} x(t) &= \tan\left(\frac{t}{3}\right) \\ y(t) &= \sin(t) \end{cases}$.

1. a. Déterminer le domaine de définition D de M.

b. Calculer, pour $t \in D_M$, $M(t+6\pi)$. En déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à un domaine D' centré en 0 qu'on explicitera.

c. Calculer, pour $t \in D'$, $M(-t)$. En déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à un ensemble D'' deux fois plus petit que le précédent.

d. Calculer alors, pour $t \in D''$, $M(3\pi - t)$ et en déduire un domaine d'étude le plus simple possible.

2. Dresser le tableau de variations des fonctions coordonnées x et$y$ sur ce domaine.

3. Vérifier qu'il n'y a pas de point singulier.

4. Montrer qu'il n'y a sur ce domaine qu'une seule branche infinie et préciser sa nature.

5. Déterminer les points éventuels où la tangente à la courbe est horizontale, ainsi que l'équation de la tangente au point $M(0)$.

6. Tracer soigneusement la courbe complète.

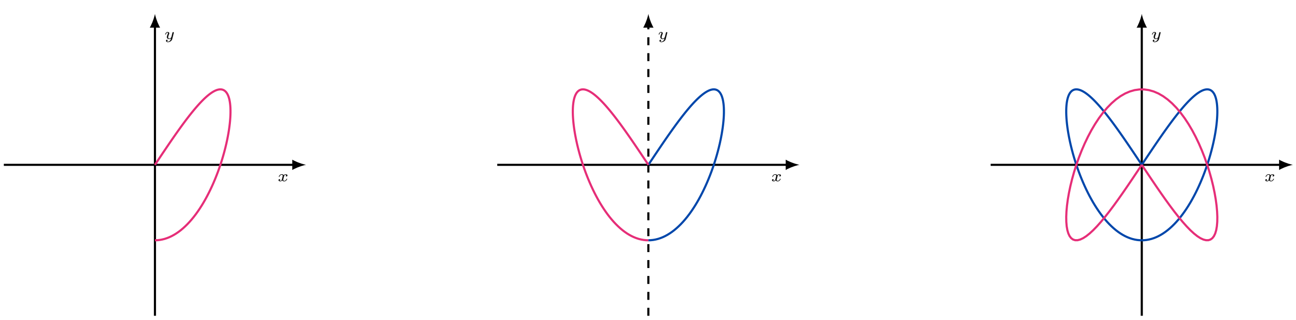
Exercice 10.

Étudier et tracer la courbe γ paramétrée par $\begin{cases} x(t) &= \cos^3(t) \\ y(t) &= \sin^3(t) \end{cases}$.

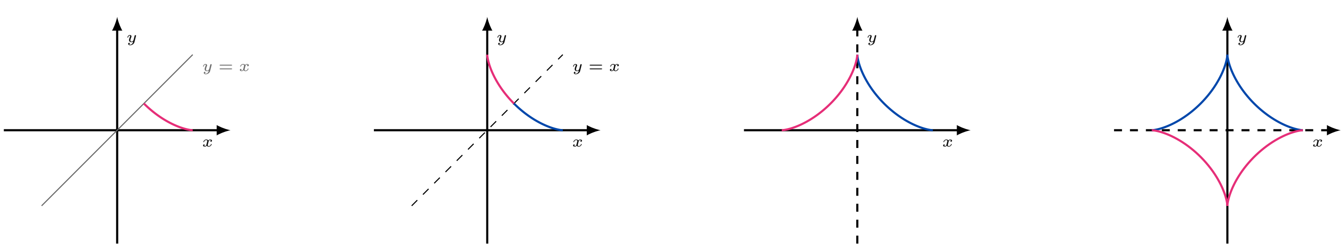
2.9 Quelques tracés

On propose les constructions très sommaires de quelques courbes paramétrées classiques pour illustrer et clore ce chapitre.

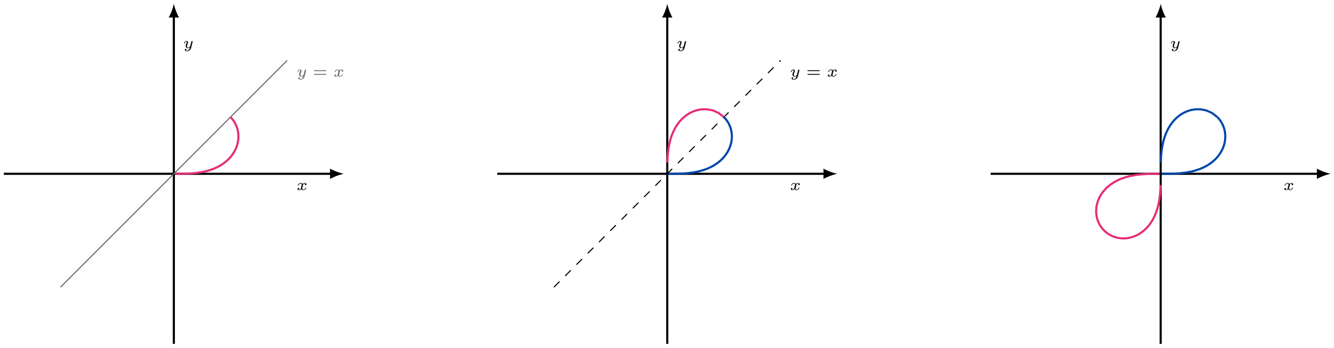
- Courbe de Lissajous $\gamma : t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$.



- Astroïde $\gamma : t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))$.



- Lemniscate de Bernoulli : $\gamma : t \mapsto \left(\dfrac{t}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$.



- Cardioïde : $\gamma \mapsto (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$.

3 Enveloppe d'une famille de droites

Définition 13.
On appelle *famille de droites* (du plan) toute famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$, où I est un intervalle (non trivial), de sorte que $\mathcal{D}_t$ soit paramétrée par

$$(\mathcal{D}_t) : A(t) + \lambda \overrightarrow{u}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

avec A et $\overrightarrow{u}$ des fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur I.

Exemple 9.

Le cercle trigonométrique est paramétré par $M(t) \begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

Pour tout $t \in [0; 2\pi]$, la tangente au point $M(t)$ est la droite

$$(\mathcal{D}_t) : \; M(t) + \lambda \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{t}}(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme M est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il s'agit bien d'une famille de droites (avec la définition ci-dessus), en l'occurrence de la famille de droites de paramétrisation

$$\forall t \in [0, 2\pi], \qquad (\mathcal{D}_t) : \begin{cases} x &= \cos(t) - \lambda\sin(t) \\ y &= \sin(t) + \lambda\cos(t) \end{cases}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, on peut, pour toute courbe paramétrée γ régulière de classe $\mathcal{C}^1$ définir la famille de ses tangentes, paramétrée par

$$(\mathcal{D}_t) : \; M(t) + \lambda \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{t}}(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On peut alors se poser la question de la réciproque du procédé ; étant donnée une famille de droite

$$(\mathcal{D}_t)_{t\in I} : \; A(t) + \lambda \overrightarrow{u}(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

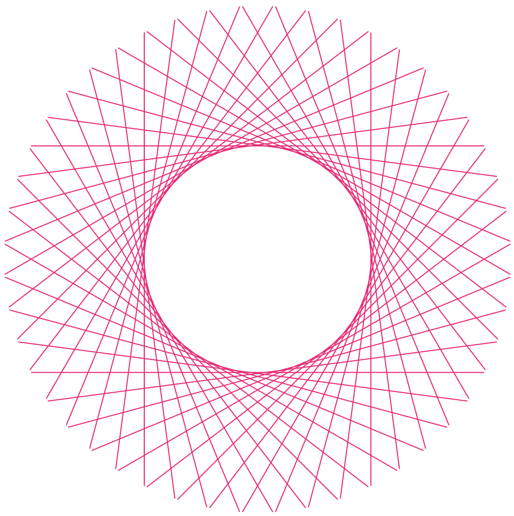
sil existe une (ou plusieurs) courbe(s) du plant dont $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ est la famille des tangentes.

Définition 14.

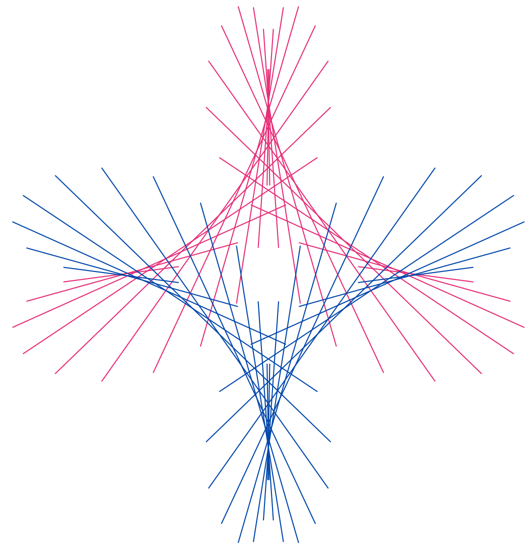
Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droites du plan. On appelle **enveloppe** de $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ toute courbe γ de classe $\mathcal{C}^1$ dont $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ est exactement la famille des tangentes.

Exemple 10.

On représente ci-dessous deux enveloppes de famille de droites.



L'enveloppe de la famille des tangentes du cercle trigonométrique est le cercle trigonométrique lui-même.



L'astroïde comme enveloppe de la famille de ses tangentes

$$(\mathcal{D}_t) : \begin{pmatrix}\cos^3(t)\\ \sin^3(t)\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\sin(t)\cos^2(t)\\ 3\cos(t)\sin^2(t)\end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La famille $(\mathcal{D}_t) : \ A(t) + \lambda\overrightarrow{u}(t)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ étant donnée, on cherche une courbe paramétrée γ telle que, pour tout t, $\mathcal{D}_t$ est tangente à γ et, pour tout point M de γ, il existe t tel que $\mathcal{D}_t$ est la tangente à γ en M.

La seconde condition implique alors que, pour tout t, il existe $\lambda = \lambda(t)$ tel que $A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$ est un point de γ. On cherche donc un paramétrage de γ sous cette forme.

On veut de plus que $\mathcal{D}_t$ soit la tangente à γ en $M(t) = A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$ c'est à dire que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t)$ et $\overrightarrow{u}(t)$ soient colinéaires, ce qui se traduit par

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t),\ \overrightarrow{u}(t)\right) = 0.$$

☞ **On doit refaire le raisonnement géométrique au cas par cas !**

Exercice 11.

Montrer que l'enveloppe de la famille des tangentes du cercle trigonométrique est le cercle trigonométrique lui-même.

4 Exercices - Travaux dirigés

Exercice 12.
Montrer que la courbe suivante admet un unique point double M, et calculer ses coordonnées:

$$\begin{cases} x(t) = t + 1 + \dfrac{1}{t-1} \\ y(t) = t^2 + 1 + \dfrac{1}{t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

Exercice 13.

Discuter selon $k \in \mathbb{R}$ la nature du point $M(0)$ de l'arc (Γ) paramétré par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \dfrac{kt^3}{6} \\ y(t) = t - \operatorname{sh}(t) + \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$.

Exercice 14. **Poisson d'Avril**
Étudier et tracer la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - 2\sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$.

Exercice 15.

Étudier et tracer la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{t} + \ln|t| \\ y(t) = t + \ln|t| \end{cases}$.

Exercice 16.

Étudier et tracer la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)} \end{cases}$.

Exercice 17.
Étudier et tracer la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \exp(t) \\ y(t) = t^2 \end{cases}$.
On étudiera précisément les points d'inflexion (tangente et positions relatives) de la courbe.

Exercice 18. **La Strophoïde droite vue comme un lieu géométrique**

1. Tracer la courbe paramétrée Γ définie par $(\Gamma)\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$.
2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, O son centre et A un point de $\mathcal{C}$. Déterminer le lieu de l'orthocentre du triangle OAM lorsque M décrit $\mathcal{C} \setminus (OA)$.
On commencera, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ bien choisi, par exprimer les coordonnées de l'orthocentre de OAM, en fonction de $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$, puis on pourra poser $t = \tan(\theta)/2$.

Exercice 19. **La courbe d'Agnesi**
Soit A le point de coordonnées $(0,2)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$. Étant donné un point $P(x_P, y_P)$ de l'axe des abscisses, on appelle $K(x_K, y_K)$ le point d'intersection de la droite (AP) et du cercle $\mathcal{C}$, et M le point de coordonnées (x_P, y_K).

1. Exprimer les coordonnées de M en fonction du coefficient directeur m de la droite (AP).
2. Quelle est la courbe parcourue par M lorsque P parcourt l'axe des abscisses privé de O?

Exercice 20.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que l'arc $(\Gamma_{a,b}) : \begin{cases} x(t) = 2t + \dfrac{a}{t^2} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{2b}{t} \end{cases}$ possède un point de rebroussement.
2. Tracer l'ensemble des points de rebroussements aux courbes $\Gamma_{a,b}$.

Exercice 21. EPITA 2005

On se propose d'étudier la courbe paramétrée $\gamma : t \mapsto M(t)$ définie par

$$x(t) = \frac{t^2+9}{t^2+1}, \qquad y(t) = \frac{t(t^2+9)}{t^2+1}.$$

1. Comparer $x(t)$ avec $x(-t)$ et $y(t)$ avec $y(-t)$.
   Que peut-on en déduire graphiquement ?

2. Étudier les limites, lorsque $t \to +\infty$, de $x(t)$ et de $y(t)$.
   Qu'en déduit-on pour les branches infinies de la courbe γ ?

3. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ puis étudier le signe de ces deux quantités.
   En déduire les coordonnées des points U et V où la tangente à γ est horizontale. (On notera U le point dont l'ordonnée est positive).
   Déterminer les coordonnées du point I où la tangente à γ est verticale.

4. Dresser les tableaux de variations de x et y sur $\mathbb{R}_+$.

5. Tracer avec soin la courbe γ. On fera apparaître les points U, V et I.

Exercice 22.

Déterminer une équation paramétrique de l'enveloppe de droites

$$(\mathcal{D}_t) : \; 2tx + 2(t+1)y + t^2 = 0.$$

Exercice 23.

On se place dans un repère orthonormé. À tout point M de la droite d'équation $x + y = 1$, on associe ses projetés orthogonaux P et Q respectivement sur (Ox) et (Oy).

1. Montrer que l'enveloppe γ des droites (PQ) peut être paramétrée par $\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= (t-1)^2 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$
2. Montrer que γ est symétrique par rapport à la première bissectrice des axes.
3. Tracer γ. Commenter.