Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Entraînement

Novembre 2025
Durée indicative : 2 heures

Ce sujet était initialement envisage comme **Devoir Surveillé n°3**.

Exercice

Pour $a \in \mathbb{R}$, on introduit $A(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{A} = \{A(a), a \in \mathbb{R}\}$.

1. $\mathscr{A}$ est-il un s.e.v. de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
2. $\mathscr{A}$ est-il stable par produit?
3. Trouver une valeur de a pour que $A(a)$ soit inversible.
4. Trouver $a_0 \neq 0$ tel $B = A(a_0)$ soit la matrice dans la base canonique d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
5. Que dire de $C = I_3 - B$?
6. Trouver $\lambda(a) \in \mathbb{R}$ tel que $A(a) = B - \lambda(a)C$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $[A(a)]^n$.

Problème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : $a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

On étudie la série de terme général a_n. On montre qu'elle est convergente et on donne des représentations de sa somme, notée γ, et appelée *constante d'Euler*. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

Préliminaires

Soient $a \leq b$ sont deux réels strictement positifs.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soient x et y deux réels strictement positifs.

2. **a**. Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que, pour tout réel $z > 0$:

$$\mathrm{e}^{-bz} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-az} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

c. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Partie 1. Une approche de la constante d'Euler

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que l'on a : $0 \leqslant a_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

4. En déduire que la suite (S_n) est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

5. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a : $a_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+p}\mathrm{d}t$. Montrer ensuite que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

6. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

7. Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que l'on a : $0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

9. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

Partie 2. Une représentation intégrale de la constante d'Euler

10. Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

b. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ quand $t \to 0^+$. Conclure.

11. a. Démontrer que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t}\right).$$

b. En déduire que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}\right).$$

c. Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0$.

d. Montrer l'égalité : $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.